Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 06.11.2009

Abgabe : 13.11.2009
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 03

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Punkt X entstehe durch Spiegelung des Punktes A an B, der Punkt Y entstehe durch Spiegelung des Punktes B an C, der Punkt Z entstehe durch Spiegelung des Punktes C an A. Wie kann man aus dem Dreieck XYZ das ursprüngliche Dreieck ABC wiederfinden?

Aufgabe 2:

Die Multiplikation $*$ zwischen Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei definiert durch die Drehstreckung

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Man beweise, daß sie für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften besitzt:

- $x * y = y * x$.
- $(x * y) * z = x * (y * z)$.
- Es gibt $e \in \mathbb{R}^2$ mit $x * e = e * x = x$.
- Für jedes $a \neq 0$ hat die Gleichung $a * x = e$ genau eine Lösung.
- $(x + y) * z = x * z + y * z$.

Aufgabe 3:

(a) Gegeben ist eine Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

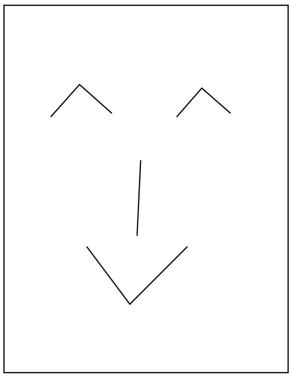
$$L(x_1, x_2) := (-x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

Beweisen Sie L ist linear und berechnen Sie $detL$.

(b) Man beweise: eine Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist linear genau dann, wenn es Zahlen a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $L(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$. Es gilt $detL = ad - bc$.

Aufgabe 4:

Zeichnen Sie (so wie in der folgenden Abbildung oder auch anders) ein Objekt in der Ebene. Transformieren Sie alle Punkte des Objekts mit der Abbildung $L(x_1, x_2) := (-x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2)$ und zeichnen Sie das Ergebnis.



Wieso genügt es für die Transformation einer Strecke die beiden Endpunkte zu transformieren und diese zu verbinden? Beweisen Sie diese Behauptung (ohne die man die Aufgabe gar nicht durchführen könnte, da sonst unendlich viele Punkte zu transformieren wären).

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{R}^3$ die Menge der räumlichen Verschiebungen bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $(\mathcal{O}, \mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z, \mathcal{U}_L)$.

(a) Gegeben sei eine Gerade $G = (1,1,1) + [(1,0,\sqrt{2})]$ und eine Ebene $E = [(1,-1,0),(3,5,1)]$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

(b) Berechnen Sie die Schnittpunkte zwischen der Ebene $E_1 = [(1,\sqrt{3},2),(0,3,7)]$ und der Ebene $E_2 = [(0,1,3),(1,4,0)]$.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $G_1 = (1,\sqrt{3},0)+[(1,2,-3)]$ und $G_2 = (2,0,1) + [(4,7,11)]$.