Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 13. 11. 2009

Abgabe : 20.11.2009
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 04

Aufgabe 1:

Gegeben sind zwei Vektoren $u = (1, 0, 3)$ und $v = (2, \sqrt{3}, 1)$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie das Orthogonalsystem und das Orthonormalsystem zu u, v.

(b) Bestimmen Sie die Projektion von $w = (-2, 3, 5)$ auf die Ebene $[u, v]$ bzw. die Spiegelung an dieser Ebene.

(c) Berechnen Sie das Orthogonalsystem und das Orthonormalsystem zu u, v, w.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen $E_1 = [(1, \sqrt{3}, 2), (0, 3, 7)]$ und $E_2 = [(0, 1, 3), (1, 4, 0)]$.

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $u_1, \ldots, u_m$ sind linear unabhängig.

(b) Die Gleichung $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m = 0$ für die Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ist nur dann erfüllt, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ gilt.

(c) Mit $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, m\}$ sind $u_{i_1}, \ldots, u_{i_m}$ auch linear unabhängig.

(d) Jede nichtleere Teilmenge von $M = \{u_1, \ldots, u_m\}$ besteht aus linear unabhängigen Vektoren.

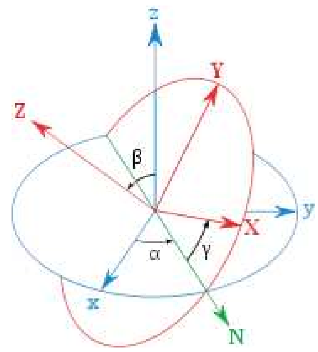
Aufgabe 4:

Gegeben sind drei Vektoren $a = (2, 1, 7)$, $b = (3, 0, 4)$, $c = (1, 3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$ im Raum $\mathbb{R}^3$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi]$ beliebig ist. Rechnen Sie das Volumen $V(a, b, c)$ aus und bestimmen Sie den Maximalwert bei Variation von α.

Aufgabe 5:

Eulersche Winkel oder auch Eulerwinkel definieren eine Transformation zwischen zwei Orthonormalsystemen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Es handelt sich um drei Winkel, welche jeweils eine Drehung (Rotation) um bestimmte Achsen beschreiben.

Die nebenstehende Abbildung bezeichnet die Eulerschen Winkel $(\alpha, \beta, \gamma) \in [-\pi, \pi) \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi)$ in der sogenannten 'zxz-Konvention'. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ seien nun Verschiebungen in Richtung x, y, z. Entsprechend sollen die orthonormalen Vektoren E_1, E_2, E_3 in die Richtung X, Y, Z zeigen, wobei $o(E_1, E_2, E_3) = +1$. Die Schnittlinie zwischen den Ebene $[E_1, E_2]$ und $[e_1, e_2]$ heißt 'Knotenlinie' (gezeichnet als grüne Linie N).



1. Wir nehmen an, die Knotenlinie $[E_1, E_2] \cap [e_1, e_2] = [k]$ sei durch k mit $\|k\| = 1$ dargestellt. Zunächst drehen wir um die z-Achse, so dass die Knotenlinie auf der x-Achse liegt, d.h. $\mathcal{D}^3_{-\alpha} k = e_1$.
2. Es folgt eine Rotation mit dem Winkel β um die x-Achse. Nun zeigt der gedrehte Vektor E_3 in Richtung z-Achse, $\mathcal{D}^1_{-\beta} \mathcal{D}^3_{-\alpha} E_3 = e_3$.
3. Die dritte Drehung ist mit dem Winkel γ um die z-Achse, so dass der gedrehte Vektor E_1 auf die x-Achse fällt, $\mathcal{D}^3_{-\gamma} \mathcal{D}^1_{-\beta} \mathcal{D}^3_{-\alpha} E_1 = e_1$.

Wegen $o(E_1, E_2, E_3) = +1$ folgt damit

$$\mathcal{D}^3_{-\gamma} \mathcal{D}^1_{-\beta} \mathcal{D}^3_{-\alpha} E_i = e_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

und mit entsprechenden Rückwärts-Drehungen ergibt sich

$$E_i = \mathcal{D}^3_{\alpha} \mathcal{D}^1_{\beta} \mathcal{D}^3_{\gamma} e_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Berechnen sie die Eulerschen Winkel der Drehung die (e_1, e_2, e_3) in

$E_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{8},\ \frac{5}{8}\sqrt{2},\ \frac{1}{4}\sqrt{3})$, $E_2 = (-\frac{3}{8}\sqrt{6},\ -\frac{1}{8}\sqrt{6},\ \frac{1}{4})$, $E_3 = (\frac{1}{4}\sqrt{2},\ -\frac{1}{4}\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3})$

überführt und bestimmen Sie die Knotenlinie.