Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 20. 11. 2009

Abgabe : 27.11.2009
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 05

Aufgabe 1:

Man zeige durch Nachrechnen, dass folgende Beziehungen für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gelten:

(a) $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$.

(b) BAC-CAB-Formel: $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$.

(c) Jacobi-Identität: $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

(d) $\|a \times b\|^2 + \|a \cdot b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$.

Aufgabe 2:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Seien $a \times b = a \times c$ und $a \neq 0$, folgt $b = c$?

(b) Seien $a \cdot b = a \cdot c$ und $a \neq 0$, folgt $b = c$?

(c) Seien $a \times b = a \times c$, $a \cdot b = a \cdot c$ und $a \neq 0$, folgt $b = c$?

Aufgabe 3:

In der Vorlesung hat bei der Formel

$$\tilde{V}(a, b, c) = o(a, b, c) V(a, b, c), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^3,$$

niemand protestiert, obwohl der Beweis unvollständig war. Vervollständigen Sie den Beweis.

Aufgabe 4:

Seien $L, M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie

$$det(LM) = detL \cdot detM.$$

Aufgabe 5:

Um die Symmetrie von geometrischen Objekten (Dreiecke, Vierecke, Quader, Ellipsoide, etc.) oder auch von Punktgittern (als idealisierten Kristallstrukturen) zu beschreiben, benutzt man folgenden Trick: man betrachtet die Menge aller Kongruenzabbildungen (endlich viele Hintereinanderausführungen von Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen), unter denen sich das Objekt ***nicht*** ändert. Gibt es viele solche Abbildungen, hat das Objekt eine hohe Symmetrie (z.B. bleibt der Kreis unter allen Drehungen um den Mittelpunkt und unter allen Achsenspiegelungen an Geraden durch den Mittelpunkt unverändert), gibt es nur wenige, hat das Objekt eine geringe Symmetrie.

Sei also $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge (das könnte auch eine ebene Figur in der $[e_1, e_2]$-Ebene sein) und

$$\mathcal{G}_K := \{S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid S \text{ ist Kongruenzabbildung und } S(K) = K\},$$

wobei $S(K) := \{Sx \mid x \in K\}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}_K$ zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe bildet (die sogenannte Symmetriegruppe des Körpers). Eine genaue Untersuchung der Symmetriegruppe eines Objekts gibt detaillierte Auskunft über seine Symmetrieeigenschaften.

(b) Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC im Raum. Seien $\triangle \subset \mathbb{R}^3$ die Menge der Koordinaten von A, B, C. Wie viele Elemente hat $\mathcal{G}_\triangle$? (Geben Sie ihre genaue Argumentation an!)