Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 27. 11. 2009

Abgabe : 04.12.2009
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 06

Aufgabe 1:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Beweisen Sie nur mit den Körperaxiomen und den Folgerungen aus der Vorlesung, dass für $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $c \neq 0$ die folgenden Identitäten gelten,

(a) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

(b) $\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c}$.

(c) $0 \cdot a = 0$.

Aufgabe 2:

Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt angeordnet, wenn es eine Relation $\leq$ gibt mit folgenden Eigenschaften für beliebige $a, b, c \in \mathbb{K}$:

- Es gilt $a \leq a$.
- Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.
- Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$
- Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$.
- Aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Wieso kann $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper sein? (Tipp: Zeigen Sie, dass in angeordneten Körper $x^2 \geq 0$ gilt.)

Aufgabe 3:

Durch welche (komplexen) arithmetischen Operationen werden die folgenden Transformationen der Zahlenebene beschrieben:

1. Die Spiegelung an der Geraden $\Im z = 4$.
2. Die Spiegelung an der Geraden $\Re\big((1 - i)\, z\big) = 0$.

Aufgabe 4:

(a) Der Einheitskreis (also die Kreislinie) in der komplexen Zahlenebene sei mit S^1 bezeichnet. Zeigen Sie: wenn $z \in S^1$, dann ist $z^{-1} = \overline{z}$. Wenn $z, w \in S^1$, dann ist auch $z \cdot w \in S^1$ und $z/w \in S^1$. Ist $(S^1, \cdot)$ eine Gruppe?

(b) Finden Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 1$; und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene. Analog für die Gleichungen $z^4 = 1$, $z^5 = 1$ und $z^3 = -1$.

(c) Stellen Sie in der Form $a + bi$ dar:

$$\frac{1}{1+i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad (1+i)^{16}, \quad i^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 5:

(a) Gegeben seien zwei K-Vektorräume U und V. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}(U, V) = \{L : U \longrightarrow V \mid L \text{ ist lineare Abbildung}\}$$

ein K-Vektorraum ist mit den üblichen Operationen $(L+S)(x) := L(x)+S(x)$ und $(\lambda L)(x) := \lambda L(x)$.

(b) Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist mit den Körperoperationen $+$ und $\cdot$ als Vektoraddition bzw. skalare Multiplikation.