Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 04. 12. 2009

Abgabe : 11.12.2009
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 07

Aufgabe 1:

(a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind linear abhängig?

$$\{(7,0,1,0),(2,0,0,2),(-3,0,0,7)\},$$
$$\{(12,34,6,1),(47,11,19,4),(8,1,0,0)\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 4-3i \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ bilden.

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ jeweils linear unabhängig sind.

$$M_1 = \{x \mapsto \sin(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(3x)\},$$
$$M_2 = \{x \mapsto x-1, x \mapsto x^2+7x+3\}.$$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass $\{x \mapsto e^{imx} \mid 0 \leq m \leq N\}$ eine Menge linear unabhängiger Funktionen in $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist.

(Tipp: Wiederholen Sie den Nachweis aus der Vorlesung, dass $x \longmapsto x^m$, $0 \leq m \leq N$ linear unabhängige Vektoren sind und benutzen Sie den gleichen Trick mit e^{ix} anstelle von x.)

Aufgabe 3:

Seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines Vektorraums V.

(a) Ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V ?

(b) Beweisen Sie, dass $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ Unterräume von V sind.

(c) Zeigen Sie im Fall $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Aufgabe 4:

Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

(a) Für k verschiedene Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, definieren wir die Funktionen

$$\delta_{x_i} : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ mit } \delta_{x_i}(f) := f(x_i), \text{ für } f \in \mathcal{F}.$$

Zu welchem Vektorraum gehören die Funktionen δ_{x_i}?

Zeigen Sie, dass $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_k}$ linear unabhängig sind und dass $\dim[\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_k}] = k$ gilt.

(b) Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ heißt beschränkt, wenn es eine Konstante C_f gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|f(x)| \leq C_f$ gilt. Die Menge aller beschränkten Funktionen in $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist und dass $\dim(\mathcal{B}) = \infty$ gilt.