Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang
J. Budday

Ausgabe: 18. 12. 2009

Abgabe : 08.01.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 09

Aufgabe 1:

Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^{6\times 1} \to \mathbb{R}^{5\times 1}$ hat die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die GE durch und benennen Sie die freien und fixierten Variablen (was ist $i_1, \dots, i_k$ und $j_1, \dots, j_r$). Bestimmen Sie Kern A und Bild A indem Sie die Vektoren c_j und s_j (siehe Vorlesung) berechnen.

Aufgabe 2: Glatte Verbindung

Auf dem Vektorraum P_N alle reellen Polynome vom Grad $\leq N$, sei die Differentiationsabbildung $D : P_N \to P_{N-1}$ definiert durch $DP = P'$.

(a) Gesucht ist ein Polynom P, so dass

$$P(0) = 0, \quad P'(0) = 0, \quad P(1) = 1, \quad P'(1) = 0.$$

Skizzieren Sie grob die Form eines solchen Polynoms auf dem Intervall $[0, 1]$. Um ein solches Polynom P zu finden, zeigen Sie zuerst, dass die Abbildung $S_N : P_N \to \mathbb{R}^4$ mit $S_N P = (\delta_0(P), \delta_0(DP), \delta_1(P), \delta_1(DP))$ linear ist. Dann lösen Sie die lineare Gleichung $S_3 P = (0, 0, 1, 0) = e_3$ durch Einführung geeigneter Basen mit dem Gauß Algorithmus.

(b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit von $S_N P = e_3$ und bestimmen Sie die Kern S_N in jedem der Fälle $N < 3$, $N = 3$ und $N > 3$.

Aufgabe 3:

(a) Sei $f : X \to Y$ eine gegebene Abbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen gelten,

(i) f injektiv $\iff (\exists g : Y \to X \ : \ \forall x \in X \ : \ g(f(x)) = x)$.

(ii) f surjektiv $\iff (\exists g : Y \to X \ : \forall y \in Y \ : \ f(g(y)) = y)$.

(b) Bestimmen Sie, ob jede der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv ist? Begründen Sie ihre Aussagen stichhaltig.

(i) $X = [-1,1]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

(ii) $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1,1]$, $f(x) = (x-1)^2 - 10$.

(iii) $X = [-\infty, 0]$, $Y = [-9, \infty]$, $f(x) = (x-1)^2 - 10$.

Die Umkehrabbildungen der bijektiven Abbildungen sind zu bestimmen.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die vier Abbildungen

$$I_1 : f \mapsto \int_{-2}^{-1} f(x)dx, \qquad I_2 : f \mapsto \int_{-1}^{0} f(x)dx,$$

$$I_3 : f \mapsto \int_{0}^{1} f(x)dx, \qquad I_4 : f \mapsto \int_{1}^{2} f(x)dx,$$

linear sind auf dem Vektorraum $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alle stetigen Funktionen. Mit ihnen definieren wir eine lineare Abbildung $L : P_3 \to \mathbb{R}^4$ mit $LP = (I_1P, I_2P, I_3P, I_4P)$.

(a) Berechnen Sie die Inverse L^{-1}.

(b) Skizzieren Sie die Polynome $L^{-1}(e_i)$, $i = 1,2,3,4$, wobei e_i die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{R}^4$ sind.

Aufgabe 5:

Drehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^3$ sind lineare Abbildungen. Nehmen Sie e_1, e_2, e_3 als Basis von $\mathbb{R}^3$ und geben Sie die Matrix zur Drehung D^1_α und der Spiegelung S an der Ebene $x = 0$ an. Berechnen Sie weiter die Matrix von $D^1_\alpha \circ S$ und $S \circ D^1_\alpha$.