Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang
J. Budday

Ausgabe: 08.01.2010

Abgabe: 15.01.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 10

Aufgabe 1: Basiswechsel

(a) Sei X ein K-VR mit den Basen $B_X = (x_1, \dots, x_n)$ und $\hat{B}_X = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ und $A = (a_{ij})$ die Matrix des zugehörigen Basiswechsels, d.h. für $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$x_j = a_{1j}\hat{x}_1 + \cdots + a_{nj}\hat{x}_n$$

Welche Matrix beschreibt den umgekehrten Basiswechsel? (Beweis!)

(b) Seien X, Y zwei K-VR mit den Basen $B_X = (x_1, \dots, x_n)$ und $\hat{B}_X = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ bzw. $B_Y = (y_1, \dots, y_n)$ und $\hat{B}_Y = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ und eine lineare Abbildung $L : X \longrightarrow Y$ gegeben. Desweiteren seien A bzw. B die darstellenden Matrizen der linearen Abbildung L bezüglich der Basen B_X und B_Y bzw. $\hat{B}_X$ und $\hat{B}_Y$ und $C = (c_{ij})$ bzw. $D = (d_{ij})$ die Matrizen der zugehörigen Basiswechsel in X bzw. in Y, d.h. für $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\hat{x}_i \qquad , \qquad y_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\hat{y}_i$$

Welcher Zusammenhang existiert zwischen den Matrizen A, B, C, D? (Beweis!)

Aufgabe 2: duale Basis

Gegeben sei ein Vektorraum X mit einer Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$. Geben Sie eine Formel für die dualen Basisvektoren $w^1, \dots, w^n$ an.

Aufgabe 3: Skalarprodukt

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ sei das Produkt $\langle x, y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ gegeben, wobei $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Bestimmen Sie alle zu e_1 bzw. e_2 senkrechten Vektoren im $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$-Skalarprodukt. Veranschaulichen Sie die Situation in der Ebene.

Aufgabe 4: lineare Differentialgleichungen

Gegeben seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, die VRe $X := C^2(I, \mathbb{R})$ und $Y := C^0(I, \mathbb{R})$ und der lineare Differentialoperator $L : X \longrightarrow Y\ ,\ u \mapsto u'' + a_1 u' + a_0 u$, wobei $a_0, a_1 \in Y$ im Allgemeinen stetige Funktionen sind. Mit $\mathcal{L} = \{u \in X \mid Lu = g\}$ bezeichnen wir für ein $g \in Y$ die Lösungsmenge der linearen Differentialgleichung $Lu = g$. Ziel ist es nun, ein $u \in \mathcal{L}$ zu finden, welches gewisse Zusatzbedingungen erfüllt. Diese können zum Beispiel folgender Art sein:

(i) $u(a) = \alpha_1\ ,\ u'(a) = \alpha_2$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}^2$
(Anfangsbedingung)

(ii) $u(a) = \alpha_1\ ,\ u(b) = \alpha_2$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}^2$
(Dirichlet-Randbedingung)

(iii) $u'(a) = \alpha_1\ ,\ u'(b) = \alpha_2$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}^2$
(Neumann-Randbedingung)

(iv) $u(a) + \alpha_1 u'(a) = \alpha_2\ ,\ u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta_2$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$
(Dirichlet-Neumann-Randbedingung)

Um Elemente von $\mathcal{L}$ zu finden, die eine Zusatzbedingung erfüllen, ist es sinnvoll, die Menge $\mathcal{L}$ zunächst durch wenige Parameter zu beschreiben (zu parametrisieren) und dann die Zusatzbedingung als Gleichung zum Auffinden der passenden Parameter zu betrachten. Da $\mathcal{L}$ mit einer speziellen Lösung $\bar{u}$ in der Form $\mathcal{L} = \bar{u} + \operatorname{kern} L$ geschrieben werden kann, erhalten wir eine solche Parametrisierung, wenn wir eine Basis von $\operatorname{kern} L$ finden. Dann sind nämlich alle Elemente von $\mathcal{L}$ mit den Koordinaten in dieser Basis eindeutig beschreibbar. Die Zusatzbedingungen werden Gleichungen für die Koordinaten sein, was den Spezialfall (i) des Anfangswertproblems genau beschreibt:

Satz 1 *Zu jedem $g \in Y$ und $\alpha \in \mathbb{R}^2$ existiert genau ein $u_{g,\alpha}$ mit $Lu_{g,\alpha} = g$ und $u_{g,\alpha}(a) = \alpha_1\ ,\ u'_{g,\alpha}(a) = \alpha_2$*

(a) Geben Sie nun mit Hilfe dieses Existenz- und Eindeutigkeitssatzes eine Basis von $\operatorname{kern} L$ an.
(Tipp: Zeigen Sie, dass die Lösungen u_{0,e_1} und u_{0,e_2} linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von $\operatorname{kern} L$ sind, d.h. dass sich jede Lösung $u_{0,h}$ von $Lu = 0$ und $u(a) = h_1\ ,\ u'(a) = h_2$ in der Form $u_{0,h} = h_1 u_{0,e_1} + h_2 u_{0,e_2}$ schreiben lässt)

(b) Sei $\bar{u} \in \mathcal{L}$ eine gegebene spezielle Lösung. Bestimmen Sie die Parameter aus der Darstellung bezüglich der Basis des Kerns für die allgemeine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

(c) Wir betrachten das Dirichletsche Randwertproblem für die Gleichung $Lu = 0$ mit $u(a) = 16$ und $u(b) = -10$. Angenommen u_1 und u_2 seien eine Basis von $\operatorname{kern} L$ mit $u_1(a) = 5$ und $u_1(b) = 3$ bzw. $u_2(a) = 2$ und $u_2(b) = 4$. Wie sieht dann für diesen Fall die Lösung des Dirichletschen Randwertproblems aus?