Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang
J. Budday

Ausgabe: 15. 01. 2010

Abgabe : 22.01.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 11

Aufgabe 1:

Sei $V = [v_1, v_2, v_3]$ ein Unterraum von $\mathbb{C}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7i \\ 3+2i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie weit ist der Punkt $a = (1, 0, 4, i)$ von V entfernt? (Tipp: ONB konstruieren von Gram Schmidt und Projektion berechnen)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Grenzwerte direkt mit der Konvergenzdefinition,

$\frac{3n-1}{4n^2+2}, \quad \frac{3^n-1}{4^n+n}, \quad \frac{n}{3^n}, \quad \frac{\sin n}{4+\sqrt[4]{n^5}}, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

(Tipp: Probieren Sie zuerst für großen n aus, was ein Grenzwert sein konnte und beweisen Sie dann zum Umgang mit Definitionen. Siehe auch Aufgabe 5).

Aufgabe 3:

Man beweise durch Induktion,

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

(c) Binomischer Lehrsatz $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Aufgabe 4:

Konstruieren Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Werte beliebige positive Werte überschreiten, beliebiege negative Werte unterschreiben und außerdem immer wieder beliebig nahe an den Wert Eins herankommen, ohne diesen genau zu treffen.

Aufgabe 5:

Mechanisches Arbeiten - ein Experiment

Die Findung mathematischer Konzepte und ihre Anwendung zur Beantwortung praxisrelevanter Fragen verlangt Kreativität. Das formale Arbeiten mit gegebenen Konzepten (Definitionen, Sätzen) ist dagegen zum großen Teil ein mechanischer Vorgang.

Wenn eine definierte Eigenschaft nachzuweisen ist, so muss *genau* die Bedingung der Definition *sorgfältig* nachgeprüft werden, wie bei einer Checkliste! Wenn ein Objekt eine definierte Eigenschaft hat, dann dürfen genau die Zusammenhänge *benutzt* werden, die in der Definition angegeben sind - wie bei einer Gebrauchsanleitung!

Um Ihnen dieses typische Vorgehen zu verdeutlichen betrachten wir die (sinnlose) Theorie der **dummbrumm** und der **brummdumm** Zahlen. Wegen der Sinnlosigkeit können Sie sich ausschlielich auf das mechanische Vorgehen konzentrieren, ohne irgendwelche Inhalte verstehen zu müssen. Die Namen der Eigenschaften sind bewusst verwirrend gewählt, um Sie zu zwingen, jeweils genau in den Definitionen nachzusehen, wenn Sie ein Konzept benutzen bzw. nachweisen wollen. Die Aufgaben sind inhaltlich einfach – die Schwierigkeit liegt im konsequenten logischen Vorgehen.

Das Vorgehen, das mit dieser Aufgabe trainiert werden soll, ist *typisch* und *wesentlich* in der Mathematik!

Wenn Sie Schwierigkeiten bei der Bearbeitung haben, versuchen Sie deshalb auf jeden Fall herauszufinden (und zu notieren), worin diese Schwierigkeiten genau bestehen.

Definition 1: Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt **dummbrumm**, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x-3)/4 = m$. Die Zahl heißt **brummdumm**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x brummdumm.

b) Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **schnickschnack**, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle x, die brummdumm sind. Die Funktion heiss t **schnackschnick**, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle x, die dummbrumm sind.

c) Zeigen Sie mit (a), dass f schnackschnick ist, wenn f schnickschnack ist.

d) Benutzen Sie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ um zu zeigen, dass die Umkehrung von Satz (c) nicht richtig ist.

Definition 3: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ heißt **pingpong**, wenn für jede schnackschnick Funktion f das Bild $T(f)$ auch schnackschnick ist. Die Funktion T heißt **pongping**, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

e) Untersuchen Sie, ob die Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $T(f) = 2f + 1$ pingpong oder pongping ist.

f) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausfhrung (Verkettung) von zwei pingpong Funktionen wieder pingpong ist.