Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang
J. Budday

Ausgabe: 22.01.2010

Abgabe: 29.01.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 12

Aufgabe 1: Orthogonalpolynome

(a) Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ durch $\langle f, g\rangle := \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt definiert wird.

(b) Wendet man auf die Folge der Polynome x^n für $n \in \mathbb{N}_0$ über dem Intervall $[0,1]$ das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich dem Skalarprodukt aus (a) an, so ergibt sich eine Folge normierter Orthogonalpolynome - die sogenannten verschobenen Legendre-Polynome. Berechnen und zeichnen Sie die ersten drei dieser Polynome.

Aufgabe 2: Folgen

Es seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen für die für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $b_n \geq a_n$ gilt. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung aus $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$ auch $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$ folgt.

Aufgabe 3: Folgen

Wieso gilt $0,\bar{9} = 1$?

Aufgabe 4: Zinseszins

Sie möchten Ihr Grundkapital B_0 für ein Jahr zu einem festen Zinssatz $0 < p \leq 1$ anlegen. Dafür möchten Sie nun wissen, ob es einen Unterschied macht, wenn Ihr Kapital B_0 in diesem Jahr einmal mit p oder zweimal mit $\frac{p}{2}$ oder dreimal mit $\frac{p}{3}$ etc. oder sekündlich mit $\frac{p}{31536000}$ verzinst wird.

(a) Formulieren Sie die Folge (a_n), die für ein $n \in \mathbb{N}$ die Wertentwicklung des n-mal mit $\frac{p}{n}$ verzinsten Grundkapitals beschreibt.

(b) Berechnen Sie die ersten 10 Folgenglieder für ein Grundkapital von $B_0 = 10000$ Euro bei einer Verzinsung von 5%.

(c) Wird das immer besser? Untersuchen Sie die Folge (a_n) für den allgemeinen Fall auf Monotonie und Beschränktheit!
(Tipps: Verwenden Sie für den Monotonie-Beweis die Bernoulli-Ungleichung in der Form $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ für $x := -\frac{p}{(n+1)(n+p)}$. Für den Beschränktheits-Beweis verwenden Sie den Binom. Lehrsatz, die Ungleichung $k! \geq 2^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$ und die Gleichung $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für $q \neq 1$)

Aufgabe 5: Stetigkeit

Es sei X ein Raum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der dazugehörigen Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt bzgl der Norm

$$\|(x, y)\|_{X^2} = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

auf X^2 stetig ist.