Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 25. 10. 2010

Abgabe : 02.11.2010

Montag Vor 12Uhr

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 1

Aufgabe 1:

Für Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Einheitsmatrix I gelten

1. Ist A invertierbar, so ist $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.
2. Es ist $\det A = 0$ genau dann, wenn $rang A < n$ und damit $\ker A \neq \{0\}$.
3. Ist B invertierbar, so ist $\det(B^{-1}AB) = \det A$, d.h. ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.

Hinweis: siehe Skript von Prof. Stoß.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Determinante der Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie für festes $R > 0$ die durch

$$\begin{aligned} x(r,\phi,\theta) &= (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y(r,\phi,\theta) &= (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z(r,\phi,\theta) &= r\sin\theta \end{aligned}$$

gegebene *Toruskoordinatenabbildung* in $\mathbb{R}^3$. Ein Volltorus T wird durch $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, und $0 \leq \phi \leq 2\pi$ beschrieben, wobei $0 < r_0 < R$. Berechnen Sie mittels dieser Koordinaten und der Gramschen Determinante den Volumeninhalt

$$V = \int_T dxdydz$$

und den Flächeninhalt der Oberfläche S des Torus T

$$A = \int_S dxdydz.$$

Aufgabe 4:

Auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ sei eine C^∞-Funktion $\rho = \rho(x,y,z)$ implizit durch $f(x,y,z,\rho) = 0$ gegeben. Wir schreiben zur Abkürzung $\partial f/\partial x := f_x$ usw. Zeigen

Sie, dass der Flächeninhalt der Graphenfläche $M = \{(x, y, z, \rho) \mid f(x, y, z, \rho) = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ durch

$$\int_M dxdydzd\rho = \int_D \frac{1}{f_\rho} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + f_\rho^2} dxdydz$$

gegeben ist.

Aufgabe 5:

Klassifizieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differenzialgleichungen (linear, nicht linear, autonom, nicht autonom, System, skalar, explizit, implizit, Ordnung) und geben Sie die Funktion Φ an.

1. $y' = p(t)y + q(t)y^n$, $n \neq 0, 1$;
2. $y' = p(t)y + q(t)y^2 + r(t)$, $r(t) \neq 0$, $q(t) \neq 0$;
3. $(y')^2 + 5y = cos(ty)$;
4. $y'' = z$, $z'' = y$;
5. $y'' = f(y^{(3)}, y^{(4)}, \ldots, y^{(n)})$, $n > 2$.