Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 01. 11. 2010

Abgabe : 08.11.2010
Vor 12Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 02

Aufgabe 1:

Klassifieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen und transformieren Sie sie zu expliziten, autonomen Systemen erster Ordnung.

(a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_2 - \dot{x}_3,\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 3x_3 - \frac{1}{2}\dot{x}_1 - \dot{x}_3,\\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}\dot{x}_2.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\alpha\dot{y}(t) + \omega_0^2 x(t) + f(t),\\ \ddot{y}(t) &= \beta\dot{x}(t) - \omega_1 y(t) + \omega_2 x(t) + g(t),\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie zur skalaren Gleichung

$$\dot{x}(t) = x(t), \quad x(0) = 1,$$

für $0 \le t \le 1$ eine Näherungslösung $\hat{x}(t)$ mit dem expliziten Euler Verfahren und dem expliziten Runge-Kutta Verfahren zweiter Stufe sowie vierter Stufe.

(i) Programmieren Sie die Verfahren für die Schrittweite $h = 1/10$.

(ii) Zeichnen Sie die Näherungslösungen $\hat{x}(t)$ und die exakte Lösung $x(t) = \exp(t)$.

(iii) Geben Sie die Werte $\hat{x}(t) - x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 1$ für $h = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$ aus.

h	1/10	1/20	1/40	1/80
$\hat{x}(t_i) - x(t_i)$ (Euler)				
$\hat{x}(t_i) - x(t_i)$ (RK2)				
$\hat{x}(t_i) - x(t_i)$ (RK4)				

Aufgabe 3:

Vorgelegt sind die numerischen Verfahren bezüglich des AWP: $\dot{u}(t) = f(t, u)$, $u(0) = u_0$. Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren zum Tableau (a), (b) und umgekehrt das Tableau zum Verfahren (c), (d) an.

(a)
$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & & \\ 1 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} & \\ \hline & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90} \end{array}$$

(c)
$$u_{m+1} = u_m + h\frac{1}{2}f(t_m, u_m) + h\frac{1}{2}f(t_m + h, u_m + hf(t_m, u_m)),$$

(d)
$$u_{m+1} = u_m + hf(t_m + \frac{h}{2}, U), \quad U = u_m + \frac{h}{2}f(t_m + \frac{h}{2}, U).$$

Aufgabe 4:

Sei $F : C^0([0,T]) \to C^0([0,T])$ Lipschitz stetig und $\Phi : C^0([0,T]) \to C^0([0,T])$ Funktion gegeben durch

$$\Phi(u)(t) = \bar{u} + \int_0^t F(u(\tau))d\tau, \qquad 0 \le t \le T, \quad u \in C^0([0,T]), \tag{1}$$

wobei $\bar{u}$ eine vorgegebener Vektor ist. Zeigen Sie, für T klein ist Φ kontrahierend bzgl. der Supermumnorm $||\cdot||_\infty$, wobei $||u||_\infty := \sup\limits_{t\in[0,T]} ||u(t)||$.

AltKlausur Aufgabe:

Beweisen Sie die Formel für die Determinante der Vandermonde Matrix, d.h. für beliebigen Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{k>j} (a_k - a_j).$$

Hinweis: Induktion und

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{m+n=p-1} x^m y^n,$$

$$\sum_{m+n=p-1} x^m y^n = x^{p-1} + y \sum_{m+n=p-2} x^m y^n.$$