Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 08. 11. 2010

Abgabe : 15.11.2010
Vor 12Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 03

Aufgabe 1:

Vorgelegt sind die Tableaus zu zwei Heun-Verfahren bezüglich des AWP: $\dot{u} = f(t, u)$, $u(0) = u_0$. Geben Sie die Verfahren an und bestimmen Sie die Konsistenzordnung. (Bemerkung: gehen Sie im Fall des Verfahrens dritter Stufe von einer autonomen DGL $\dot{u} = f(u)$ an.)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgenden skalaren gewöhnlichen Differenzialgleichungen.

1) $y' = e^y \cos(t)$,

2) $y' = y^2 + 1$,

3) $y' = -\frac{t^2}{y^3}$,

4) $y' = t^2 + 2ty$,

5) $y' = -7y + 5e^{-4t}$.

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, dann existiert für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $u_{\bar{u}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des gewöhnlichen DGL $\dot{u} = f(u)$ mit Anfangswert $u(0) = \bar{u}$. Damit ist der Phasenfluss durch

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (t, \bar{u}) \mapsto u_{\bar{u}}(t) \tag{1}$$

gegeben. Ferner, bezeichnen wir $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi_t(\bar{u}) := \Phi(t, \bar{u})$.

a) Zeigen Sie, $\Phi_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ (Identität auf $\mathbb{R}^n$) und für alle $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$(\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2})(\bar{u}) = \Phi_{t_1+t_2}(\bar{u}), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Berechnen Sie $\dfrac{d}{dt}\Phi_t(\bar{u})$.

c) Beweisen Sie $||\Phi_t(\bar{u}) - \Phi_t(\bar{v})|| \leq C||\bar{u} - \bar{v}||$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$.
(Hinweis: Gronwall Idee in Satz 2.1)