Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 15. 11. 2010

Abgabe : 22.11.2010
Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 04

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differenzialgleichungen.

1. $y' = \frac{x^2+5y^2}{3xy}$,
2. $y' + \frac{y}{1+t} + (1+t)y^4 = 0$, $y(0) = -1$,
3. $y' = (1-t)y^2 + (2t-1)y - t$, $y(0) = 0$.

Aufgabe 2:

Es sei die folgende Differenzialgleichung gegeben:

$$y''(t) + ty(t) = \sin(t).$$

Leiten Sie über den Potenzreihenansatz $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ eine Rekursionsformel für die unbekannten Koeffizienten $(c_k)_k$ her. Konvergiert die Reihe?

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass es sich bei folgender Gleichung um eine exakte Differenzialgleichung handelt, und lösen Sie diese:

$$12ty(t) + 3 + 6t^2 y'(t) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 4:

Die Differentialgleichung

$$(2t^2 + 2ty^2(t) + 1)y(t) + (3y^2(t) + t)y'(t) = 0$$

ist nicht exakt. Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie einen geeigneten integrierenden Faktor finden.

Aufgabe 5:

Sei $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und für jedes $t \in [0,T]$ sei $x \mapsto F(t,x)$ Lipschizstetig mit der gleichen Konstante L.

a) Für $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$, $a \in [0,T)$ und $\triangle > 0$ mit $[a, a+\triangle] \subset [0,T]$ sei $\phi : C^0([a, a+\triangle], \mathbb{R}^n) \to C^0([a, a+\triangle], \mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\phi(u)(t) = \bar{u} + \int_a^t F(s, u(s))ds, \qquad t \in [a, a+\triangle].$$

Zeigen Sie wie in Blatt 02 (Aufgabe 4), dass ϕ bezüglich der Supremumsnorm Lipschitzstetig ist.

b) Für welche Wahl von $\triangle$ können Sie zeigen, dass ϕ einen eindeutigen Fixpunkt und das AWP $\dot{u} = F(t,u), u(a) = \bar{u}$ damit auf $[a, a+\triangle]$ eine eindeutige Lösung hat?

c) Definieren Sie für ein geeignetes $\triangle > 0$ aus geeigneten Einzellösungen auf den Intervallen $[k\triangle, (k+1)\triangle]$ eine Funktion $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, so dass u eindeutige Lösung von $\dot{u} = F(t,u),\ u(0) = \bar{u}$ ist.

Damit haben Sie den Satz von Picard-Lindelöf beweisen.