Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 22. 11. 2010

Abgabe : 29.11.2010

Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 05

Aufgabe 1:

Gegeben sei das folgende lineare System

$$x' = a(t)x - b(t)y,$$
$$y' = b(t)x + a(t)y.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses System auf eine einzige lineare Gleichung $z' = c(t)z$ für $z(t) = x(t) + iy(t)$ zurückführbar ist.

b) Leiten Sie für $v(t) := |z(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t)$ eine lineare Differenzialgleichung ab.

c) Der Vorteil der Darstellung $z' = c(t)z$ aus a) ist, dass nun Methode (b) aus Kapitel 3 anwendbar ist (skalare Gleichung!). Benutzen Sie die Methode um damit das System im Fall $a(t) = \cos(t)$ und $b(t) = \sin(t)$ zu lösen. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $Z(t)$ des Systems mit $Z(0) = I$ und deren Wronski-Determinante.

Aufgabe 2:

a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter im skalaren AWP: $\dot{u} = f(t, u, \lambda)$ mit $u(0) = 1$ und $f(t, u, \lambda) = u + \lambda t^2$. Geben Sie die Lösung dieser Differenzialgleichung an. Ferner beachten Sie, dass die Lösung nicht nur von t sondern auch von λ abhängig ist. Berechnen Sie $\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$.

b) Für ein allgemeines AWP: $\dot{u}(t) = f(t, u, \lambda)$ mit $u(0) = \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ und einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzgl. t, u, λ stetig differenzierbar ist, bezeichnen wir die Lösung $u(t, \lambda) \in \mathbb{R}^n$, um ihre Abhängigkeit von λ hervorzuheben. Unter der Voraussetzung, dass u hinreichend oft differenzierbar ist, zeigen Sie, dass $y(t) := \frac{\partial u}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ die folgende Differenzialgleichung erfüllt,

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + r(t)$$

mit $A(t) = \frac{\partial}{\partial u} f(t, u, \lambda)|_{u=u(t,\lambda)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $r(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, u, \lambda)|_{u=u(t,\lambda)} \in \mathbb{R}^n$.

c) Bestimmen Sie $A(t)$ und $r(t)$ für das Beispiel aus a) und lösen Sie die Gleichung für $y(t)$ in diesem Fall. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus a).

Aufgabe 3:

a) Lösen Sie das AWP: $\dot{u} = u^2$ mit $u(0) = \bar{u}$. Beachten Sie, dass die Lösung nicht nur von t sondern auch von Anfangswert $\bar{u}$ abhängig ist. Berechnen Sie $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}$.

b) Sei Φ_t der Phasenfluss gegeben in Aufgabe 3 (Blatt 03). Zeigen Sie, unter der Annahme dass $(t, \bar{u}) \mapsto \Phi_t(\bar{u})$ hinreichend oft differenzierbar ist, dass die Jacobimatrix $Y(t) := \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \Phi_t(\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das AWP:

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t), \quad Y(0) = I$$

erfüllt mit $A(t) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}|_{u=\Phi_t(\bar{u})}$.

c) Bestimmen Sie $A(t)$ für das Beispiel aus a) und lösen Sie die Gleichung für $Y(t)$ in diesem Fall. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus a).

Aufgabe 4:

Beweisen Sie den Satz 4.8 von Liouville aus der Vorlesung. Eine Wronski-Determinante $w(t)$ zum linearen Gleichungssystem $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ erfüllt die Differenzialgleichung

$$\dot{w}(t) = \mathrm{spur}(A(t))w(t)$$

und hat damit die Form $w(t) = w(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} \mathrm{spur}(A(s))ds)$.