Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 29. 11. 2010

Abgabe : 06. 12. 2010
Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 06

Aufgabe 1:

Betracht wird eine DGL

$$\dot{u} = F(u) \text{ mit } F : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}. \tag{1}$$

a) Sei $\bar{u}$ eine Nullstelle von F. Können Sie eine Lösung von (1) mit dem Startwert $u(0) = \bar{u}$ angeben? Wieso nennt man Nullstellen von F auch Gleichgewichtslagen der DGL?

b) Bei linearen DGL mit $F(u) = Au$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\bar{u} = 0$ immer eine Gleichgewichtslage. Bestimmen Sie die Lösung der DGL in den Fällen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und skizzieren Sie jeweils Lösung zu verschiedenen Startwerten in der Nähe von $\bar{u} = 0$ (sog. Phasenportraits). Nutzen Sie jeweils in allen vier Quadranten unterschiedliche Startwerte.

c) Man nennt eine Gleichgewichtslage $\bar{u}$ stabil wenn für beliebige Startwerte in der Nähe von $\bar{u}$ die Lösung immer in der Nähe der Gleichgewichtslage bleibt. Ansonsten nennt man die Lage labil bzw. instabil. Charakterisieren Sie die Beispiele aus b) bzgl. der Stabilität von $\bar{u} = 0$. Sehen Sie einen Zusammenhang zwischen Stabilität und den Eigenwerten der Matrix?

Aufgabe 2:

Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich unter konstanter Gravitationsbeschleunigung g auf einer kosinusförmigen Bahn $\gamma(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma \\ \cos(\sigma) \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ bewegen kann. Die Bewegungsgleichung für den Bahnparameter lautet

$$\ddot{\sigma} = \frac{g\sin(\sigma) - \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 \sin(2\sigma)}{1 + \sin^2(\sigma)}.$$

a) Schreiben Sie die Differenzialgleichung als System erster Ordnung $\dot{u} = F(u)$ für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ mit $u_1 = \sigma$ und $u_2 = \dot{\sigma}$.

b) Berechnen Sie die Gleichgewichtszustände $\bar{u}$ des Systems und überprüfen Sie, ob das Ergebnis anschaulich sinnvoll ist.

c) Um die Stabilität des Systems zu untersuchen wählen wir nun Startwerte, die sehr nahe an einem Gleichgewichtspunkt liegen d.h. $u(0) = \bar{u} + \bar{y}$ mit $\bar{y}$ sehr klein.

Solange die zugehörige Lösung u nahe an $\bar{u}$ ist, macht die Näherung

$$F(u) \approx F(\bar{u}) + F'(\bar{u})(u - \bar{u})$$

Sinn, d.h. $y = u - \bar{u}$ erfüllt näherungsweise das linearisierte AWP

$$\dot{y} = F'(\bar{u})y, \quad y(0) = \bar{y}.$$

Bestimmen Sie die linearisierten Differenzialgleichungen um die Gleichgewichtszustände und berechnen Sie die Lösung. Welche Gleichgewichtspunkte sind stabil, welche labil (zur Definition siehe Aufgabe 1 c))?

Aufgabe 3:

Wir betrachten den Vektorraum $V = C^\infty([0,1],\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $V_0 = \{u \in V \mid u(0) = u(1) = 0\}$ ein Teilraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $D : V_0 \to V$ gegeben durch $Du = \ddot{u}$ eine lineare Abbildung ist.

c) Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $D - \lambda I : V_0 \to V$ nicht injektiv ist, heißen Eigenwerte von D (hier ist I die Identität auf V).

Berechnen Sie die Eigenwerte von D in dem Sie $\mathrm{kern}(D - \lambda I)$ ermitteln, d.h.

(i) die Gleichung $(D - \lambda I)u = 0$ lösen,

(ii) die freien Parameter in u so wählen, dass $u(0) = u(1) = 0$ ist,

(iii) überprüfen, ob es nur die triviale Lösung gibt.

Aufgabe 4:

Lösen Sie das System

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$