Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 06. 12. 2010

Abgabe : 13. 12. 2010
Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 07

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösung der angegebenen Systeme:

a) $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = -u_1 - 2u_3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1' = 2u_1 - u_3 + u_4 \\ u_2' = 2u_2 + u_4 \\ u_3' = u_1 + u_2 + 2u_3 \\ u_4' = -u_2 + 2u_4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = 8x + 12y - 2z \\ y' = -3x - 4y + z \\ z' = -x - 2y + 2z \end{cases}$

Aufgabe 2:

Sei $a > 0$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Randwertprobleme nichttrivial lösbar? Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen, indem Sie zuerst die allgemine Lösung der Differenzialgleichung berechnen und dann die freien Parameter mit der Zusatzbedingungen festlegen.

a) $u'' + \lambda u = 0$ mit $u'(0) = u'(a) = 0$, $u \in C^2([0, a], \mathbb{R})$ (Neumannsche Nullrandbedingungen).

b) $u'' = f(t)$ mit $u'(0) = 0$, $u'(a) = \lambda$, $u \in C^2([0, a], \mathbb{R})$ (Kompatibilität der Randbedingung).

c) $u'' + \lambda u = 0$ mit $u(a) = \epsilon^{i\theta} u(0)$ und $u'(a) = \epsilon^{i\theta} u'(0)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $u \in C^2([0, a], \mathbb{C})$. Für welche $\theta \in \mathbb{R}$ ist der Lösungsraum ein- bzw. zweidimensional?

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller selbstadjungierten Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ ein $\mathbb{R}-$Vektorraum ist.

b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Beweisen Sie, dass $(\operatorname{im} A)^\perp = \operatorname{kern}(A^*)$.

Aufgabe 4:

Beweisen Sie:

a) Alle unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation (die sogenannte unitäre Gruppe $U(n)$).

b) Alle orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ bilden auch eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation (die sogenannte orthogonale Gruppe $O(n)$).

c) Die Teilmengen aller Matrizen A in $U(n)$ und $O(n)$ mit der Eigenschaft $\det(A) = \pm 1$ bilden wieder zwei Gruppen bzgl. der Matrixmultiplikation (die sogenannte spezielle unitäre bzw. spezielle orthogonale Gruppe $SU(n)$, $SO(n)$).