Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 13. 12. 2010

Abgabe : 20. 12. 2010
Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 08

Aufgabe 1:

a) Geben Sie (mit Begründung) eine reelle $2\times 2-$Matrix an, deren charakteristisches Polynom (auf $\mathbb{R}$) nicht zerfällt.

b) Prüfen Sie, ob die beiden folgenden Matrizen diagonalisierbar sind, d.h. ob es invertierbare Matrix S gibt, so dass SAS^{-1} diagonal ist:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Geben Sie (mit Begründung) eine komplexe $2\times 2-$Matrix an, die nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2:(Berechnung der Eigenschwingungen der Federkette)

Gegeben sei ein System aus 6 Federn mit der Federkonstante $k = 1$ und 4 Einheitsmassen, wobei die linke und rechte Feder fixiert seien. Der Schwerkraft wird vernachlässigt. Nach einmaligem Anstoßen, bewegen sich die Massen in der Kettenrichtung. Die Variablen x_i, $i = 1, \ldots, 4$ seien die Abweichungen der Massen aus den Ruhelagen. Für sie gilten die Differenzialbgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2), \\ \ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3), \\ \ddot{x}_4 &= -k(x_4 - x_3) - kx_4 \end{aligned}$$

a) Um dieses Differenzialgleichungsystem zu lösen, schreiben Sie das System in der Form $\ddot{x} + Ax = 0$ und bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von A: $Au_i = \lambda_i u_i$.

Die allgemeine Lösung dieses Systems besteht aus Linearkombinationen der (möglicherweise Phasenverschobenen) Eigenschwingungen

$$\cos(\sqrt{\lambda_i} t) u_i.$$

b) Veranschaulichen Sie die vier Eigenschwingungen durch sinnvolle Skizzen der Federkette.

Aufgabe 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist, nicht aber B.

b) Berechnen Sie die Wurzeln und die Absolutbeträge von A und B, und $\sin^2(B) + \cos^2(B)$ sowie $\ln(A)$, $\exp(\ln(A))$.

c) Gilt allgemein $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$? Stimmt es für speziellen Matrizen?

Aufgabe 5:

Klassifizieren Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen (lokales Maximum, lokales Minimum, Sattelpunkt):

a) $f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$,

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2$.