Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 20. 12. 2010

Abgabe : 17. 01. 2011
Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 09

Aufgabe 1:

Es seien A, B positiv definite Matrizen. Zeigen Sie,

a) A^{-1} existiert und ist positiv definit,

b) A^m ist für alle $m \in \mathbb{N}$ positiv definit,

c) $A + B$ ist positiv definit.

Aufgabe 2:

Prüfen Sie die Definitheit der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 16 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 50 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Notieren Sie alle verschiedenen Jordan-Normalformen für folgende Matrizen.

a) $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mit $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^5$.

b) $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $\chi_B(\lambda) = (\lambda - b_1)^2(\lambda - b_2)^2$.

Aufgabe 4:

Sei V der $(2m+1)$-dimensionale Vektorraum der diskreten Signale $f : \{t_0, \dots, t_{2m}\} \to \mathbb{C}$ mit $t_i = i\triangle t$, $\triangle t = \frac{T}{N}$. Nach periodischer Fortsetzung definieren wir die Operatoren $(Uf)(t) := f(-t)$, $(Sf)(t) := f(t - \triangle t)$ und $(Df)(t) := \frac{f(t+\triangle t)-f(t)}{\triangle t}$, die jeweils V nach V abbilden.

a) Stellen Sie die Matrizen zu diesen Operatoren bezüglich der Impulsbasis $\delta_0, \dots, \delta_{2m}$ von V dar (wobei $\delta_k(t_j) = \delta_{kj}$).

Hinweis: In der j-ten Spalte der Matrix stehen die Koordinaten des Bildes des j-ten Basisvektors.

b) Stellen Sie die Matrizen bezüglich der Fourierbasis $e_{-m}, \dots, e_m$ von V auf (wobei $e_k(t) = \exp(2\pi ikt/T)$).

c) Im Raum $\hat{V}$ der Frequenzfunktionen $h : \{\omega_{-m}, \ldots, \omega_m\} \to \mathbb{C}$ mit $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ führen wir die Impulsbasis $\eta_{-m}, \ldots, \eta_m$ ein (wobei $\eta_k(\omega_j) = \delta_{kj}$). Die Fouriertransformation $F : V \to \hat{V}$ ist dann gegeben durch

$$Ff = \sum_{k=-m}^{m} < e_k, f >_N \eta_k.$$

Stellen Sie die Matrix zu F bezüglich der Impulsbasen von V und $\hat{V}$ auf.

Aufgabe 5:

Ein Schwarzweißbild mit $N = n \times n$ Pixeln kann als Funktion f auf der diskreten Menge $\Omega_N = \{(x_i, y_i) \mid x_i = ih, y_j = jh, i, j \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ betrachtet werden, wobei $f(p)$ für die Helligkeit des Pixels $p \in \Omega_N$ steht.

a) Welche Dimension hat $V = \{f : \Omega_N \to \mathbb{R}\}$?

b) Führen Sie eine zweidimensionale Fouriertransformation $F : V \to \hat{V}$ ein, indem sie die eindimensionale Transformation zunächst in x und dann in y anwenden. Wie lautet die zugehörige Fourierbasis von V?

c) Geben Sie ein Skalarprodukt auf V an, indem die Fourierbasis eine Orthonormalbasis ist.

d) Wie wirkt sich eine periodische Verschiebung des Bildes um r Pixel nach rechts und um s Pixel nach oben auf das Spektrum aus?

Aufgabe 6:

Berechnen Sie $\exp(tA)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -16 & 30 & -44 & -12 \\ 13 & -7 & 18 & -26 & -6 \\ -18 & 12 & -21 & 36 & 12 \\ -9 & 6 & -12 & 21 & 6 \\ 11 & -8 & 15 & -22 & -3 \end{pmatrix}.$$