Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 17. 01. 2011

Abgabe : 24. 01. 2011
Vor 12:00Uhr Montag

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 10

Aufgabe 1:

Mit Fouriertransformation lösen Sie die Differenzengleichung $D^2u(t) = \sin(2\pi t)$, $t \in [0,1]$ mit periodischen Randbedingungen $u(1) = u(0)$ auf den Punkten $t_i = i\triangle t$, $i = 0, \ldots, 10$, wobei $\triangle t = \frac{1}{11}$.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie $\ln_{-\frac{\pi}{8}}(-1)$, $\ln_{-\frac{\pi}{4}}(-1)$, $\ln_{\frac{\pi}{8}}(-1)$, $\ln_{\frac{\pi}{4}}(-1)$ und $\sqrt{-1}$.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$, zeigen Sie, dass $\cos(z)$ und $\sin(z)$ einen Period 2π und nur reelle Nullstellen haben.

c) Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} |\cos(z)| = \infty \text{ und } \lim_{y\to\pm\infty} |\sin(z)| = \infty.$$

Aufgabe 3:

Man gebe an, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das Polynom $x^2 + 2axy + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ ist und bestimme für jedes solche (a, b) alle diese holomorphen Funktionen.

Aufgabe 4:

Sind folgende Funktion holomorph? (Mit Begründung)

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = z^2|z|$

Aufgabe 5:

Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\Im f$ konstant auf $\partial\Omega$ für eine Menge $\bar{\Omega} \subset G$ und

$$w(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} \Re f'(x_1 + ix_2) \\ -\Im f'(x_1 + ix_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3, x_1 + ix_2 \in \bar{\Omega}.$$

Zeigen Sie

a) Das Feld w ist quellfrei und wirbelfrei, also

$$\operatorname{div} w = 0, \quad \operatorname{rot} w = 0$$

(und beschreibt damit eine inkompressible reibungsfreie Strömung).

b) Die Funktion $u(x_1, x_2, x_3) = \Re f(x_1 + ix_2)$ ist ein Potential der Strömung, d.h. $\nabla u = w$.

c) Entlang der Stromlinien zum Feld w (d.h. entlang der Lösungskurven von $\dot{p}(t) = w(p(t))$) ist die Stromfunktion $v(x_1, x_2, x_3) = \Im f(x_1 + ix_2)$ konstant.

d) Die Strömung verlässt das Gebiet nicht, d.h. w ist tangential zum Rand des Strömungsgebiets.

e) Berechnen Sie eine Eckenströmung, d.h. eine Strömung im Gebiet

$$\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \geq 0, \Im z \geq 0\}$$

und zeichnen Sie die Stromlinien. Tipp: suchen Sie eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\Im f(z) = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 6: **Joukowski-Profil**

Ein Kreis in der z-Ebene mit dem Mittelpunkt $z_M = a + ib$ und dem Radius r ist mit $w = z + \frac{1}{z}$ abzubilden. Mit den zusätzlichen Bedingungen, dass der Kreisumfang durch den Punkt $(-1; 0)$ verläuft und dass der Punkt $(1; 0)$ außerhalb des Kreises liegt, heißt die Abbildung das Joukowski-Profil.

Nehmen Sie $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ und $r = 1$, und skizzieren Sie den Kreis und die Form des abgebildeten Profils.