



## Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 11

### Aufgabe 1:

Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)z^n.$$

### Aufgabe 2:

Sei  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , und

$$u(x, y) = x^3 + 5x^2 - 3xy^2 - 5y^2 + 3x, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 3y + 10xy.$$

- Ist  $f$  holomorph?
- Geben Sie eine Stammfunktion an.

### Aufgabe 3:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

- $\int_{\gamma} \bar{z}^3 dz$  mit  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .
- $\int_{\gamma} \ln_0(z) dz$  mit  $\gamma(t) = Re^{it}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  und  $R > 0$  fest.
- $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$ .

### Aufgabe 4:

Es sei  $\gamma(t) := (1 + t^2)e^{2\pi ti}$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Berechnen Sie die Umlaufzahl um  $z_0 = 0$ . Skizzieren Sie den Weg  $\gamma$  und tragen Sie die Umlaufzahlen der jeweiligen Komponenten ein.

### Aufgabe 5:

Welche der folgenden Funktionen hat auf dem jeweiligen Definitionsbereich eine Stammfunktion? (mit Begründung.)

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$ .
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \Re z$ .
- $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \cos(z) \exp(i \sin(z))$ .

### Aufgabe 6: "Discount"

Diskutieren Sie die "Identitäten":  $2 = e^{\ln 2} = e^{2\pi i \frac{\ln 2}{2\pi i}} = (e^{2\pi i})^{\frac{\ln 2}{2\pi i}} = 1^{\frac{\ln 2}{2\pi i}} = 1$ .