



Übungen zur Mathematik für Physiker III

Blatt 11

Aufgabe 1:

Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)z^n.$$

Aufgabe 2:

Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, und

$$u(x, y) = x^3 + 5x^2 - 3xy^2 - 5y^2 + 3x, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 3y + 10xy.$$

- Ist f holomorph?
- Geben Sie eine Stammfunktion an.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

- $\int_{\gamma} \bar{z}^3 dz$ mit $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.
- $\int_{\gamma} \ln_0(z) dz$ mit $\gamma(t) = Re^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ und $R > 0$ fest.
- $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$.

Aufgabe 4:

Es sei $\gamma(t) := (1 + t^2)e^{2\pi ti}$, $t \in [-1, 1]$. Berechnen Sie die Umlaufzahl um $z_0 = 0$. Skizzieren Sie den Weg γ und tragen Sie die Umlaufzahlen der jeweiligen Komponenten ein.

Aufgabe 5:

Welche der folgenden Funktionen hat auf dem jeweiligen Definitionsbereich eine Stammfunktion? (mit Begründung.)

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$.
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \Re z$.
- $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos(z) \exp(i \sin(z))$.

Aufgabe 6: "Discount"

Diskutieren Sie die "Identitäten": $2 = e^{\ln 2} = e^{2\pi i \frac{\ln 2}{2\pi i}} = (e^{2\pi i})^{\frac{\ln 2}{2\pi i}} = 1^{\frac{\ln 2}{2\pi i}} = 1$.