



Mentorat Mathematik Prüfungstraining

Einige Tips zum Erlernen von Mathematik

- 1) (Angebliche) Selbstverständlichkeiten hinterfragen, so daß sie nicht nur selbstverständlich *gewußt* sondern auch selbstverständlich *begründet* werden können.
- 2) Hinterfragen von wichtigen Voraussetzungen zentraler Theoreme. Warum benötigt der Satz X diese oder jene Annahme und an welcher Stelle wird davon entscheidend im Beweis Gebrauch gemacht?
- 3) Aufspüren von einfachen Tatsachen mit tiefgreifenden Konsequenzen.
- 4) Aufspüren von Spitzfindigkeiten oder Subtilitäten, welche bei Nichtbeachtung leicht Anlaß zu irrigen Schlußfolgerungen oder scheinbaren Widersprüchen geben.
- 5) Mathematische Begriffe und Konzepte mit Anschauung und Leben füllen. Intuition und spontane Vorstellungskraft, wo trägt sie, wo täuscht sie?
- 6) Herstellen von Zusammenhängen, welche oftmals die Anschauung unterstützen.
- 7) Üben³ = Üben, Üben, Üben !!! Rechenaufgaben, Anwendungsaufgaben, Beweisaufgaben.

Beispiele aus der Funktionentheorie:

- ad 1) a) Wohl kaum ein Mathematikstudent weiß nicht, daß sich Potenzreihen durch das Vorhandensein von Konvergenzkreisscheiben auszeichnen, in deren Innern sie konvergieren. Das Potenzreihen außerhalb ihrer Konvergenzkreisscheibe divergieren müssen ist vielleicht nicht ebenso klar. Warum?
- b) Entwicklung von Potenzreihen um einen neuen Mittelpunkt auf naive Weise (Umbildungssatz)?
- c) Berechne für $z \in \mathbb{C}$ das Integral
- $$\int_{S_r(0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$
- ohne Verwendung des Residuensatzes. Welche Fälle sind zu unterscheiden?
- d) Zusammenhang zwischen der Binomial- Exponential- und Logarithmusreihe im Einheitskreis.
- ad 2) Warum läßt sich der Cauchysche Integralsatz (bzw. das Goursatsche Integrallemma) nicht für stetige Funktionen beweisen?
- ad 3) a) Welcher einfache Umstand unterscheidet reelle Differenzierbarkeit von komplexer Differenzierbarkeit und ist letztendlich für den "Reichtum" der Funktionentheorie "verantwortlich"?

- b) Welche fast triviale Tatsache geht ganz wesentlich in den Beweis des Residuensatzes ein?
- ad 4) a) Betrachte die folgende Laurent-Reihe:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^n$$

Welcher Singularitätentyp liegt im Nullpunkt vor? Welche Funktion wird durch sie dargestellt?

- b) Arbeite den Beweis zur Laurent-Zerlegung genau durch (z.B. im Remmert). Die angegebenen Formeln für den Haupt- und Nebenteil sehen nahezu gleich aus. Stimmt etwas nicht oder was ist los?
- ad 5) In der letzten AIII-Klausur sollte gezeigt werden, daß die Betragsfunktion nicht holomorph ist. Dazu hat ein Großteil der Klausurteilnehmer das Wegintegral über den Einheitskreis trotz der Einfachheit falsch berechnet. Welches Wunschdenken und welche vermeintlich naheliegende, anschauliche Parallele könnte zu diesem Massenirrtum beigetragen haben?
- ad 6) a) Wie läßt sich die Jacobi-Matrix einer holomorphen Funktion geometrisch interpretieren, wenn man sie als Transformation des \mathbb{R}^2 bzw. eines Teilgebietes auffaßt?
- b) Wie läßt sich das komplexwertige Wegintegral einer holomorphen Funktion interpretieren, wenn man sie als reelles, ebenes Vektorfeld auffaßt?

Weitere Anregungen und Wiederholungsfragen:

- a) Bekanntermaßen läßt sich der Residuensatz zur Berechnung uneigentlicher Integrale nutzen. Welcher Abklingbedingung sollte der Integrand genügen, damit man als Contour einen im Ursprung zentrierten Halbkreisbogen wählen kann?
- b) Wie läßt sich das Residuum leicht bestimmen, ohne die Laurent-Reihe aufstellen zu müssen? (gesucht ist eine handliche Formel)
- c) Nachdem bereits Lyriker und Prosaisten der Übungsgruppe 7 die wesentlichen Resultate der Funktionentheorie ihre Kunst gemäß reflektiert und verarbeitet haben, sollen nun die Graphiker zum Zuge kommen:
Erstelle ein mnemotechnisches Diagramm, das die Hauptaussagen der Funktionentheorie und ihre Abhängigkeit untereinander darstellt.
- d) Trage alle Dir bekannten Eigenschaften (Konvergenz-, analytische Eigenschaften) von Potenzreihen zusammen. Welche Konvergenzbegriffe spielen in der Funktionentheorie eine wichtige Rolle? Warum? Wo unterscheidet sich die Funktionentheorie unter diesem Gesichtspunkt wesentlich von der reellen Analysis?
- e) Wie sieht der nullte, $n - 1$ 'te und n 'te Koeffizient des charakteristischen Polynoms einer $n \times n$ Matrix aus?
- f) Funktionenräume sind im allgemeinen *unendlich-dimensionale* Vektorräume. Warum ist der Lösungsraum eines linearen Differentialgleichungssystems jedoch endlich-dimensional?
- g) Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t)g(x)$, welche mittels Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann. Skizziere qualitativ das t - x Diagramm, für den Fall, daß g mehrere Nullstellen besitzt.