Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

22. Nov., WS 2004/05

Mentorat Mathematik
Quicky zu Differentialgleichungen

Frage 1: Wie sieht die Lösung des folgenden Anfangswertproblems aus?

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t) = ax(t) + b, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Die Lösung ist gegeben durch: $\quad x(t) = (x_0 + \frac{b}{a})e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}$

Frage 2: Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem *Banach*schen und *Weissinger*schen Fixpunktsatz?

Der Fixpunktsatz von Banach ergibt sich als Spezialfall aus dem allgemeineren Fixpunktsatz von Weissinger, sofern es sich bei der auftretenden, konvergenten Reihe mit nicht-negativen Summanden um eine geometrische Reihe handelt, d.h. $\alpha_n = q^n$ mit $0 < q < 1$.

Frage 3: Wie ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von *Picard-Lindelöf* zu modifizieren, falls im Beweis nicht der *Weissinger*sche sondern stattdessen der *Banach*sche Fixpunktsatz angewendet werden soll?

Es ist sicherzustellen, daß der Integraloperator, welcher in der Fixpunktformulierung des Anfangswertproblems auftritt, eine Kontraktion darstellt.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

Daher ist das Definitionsintervall $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ für die Lösung ggf. weiter einzuschränken, d.h. $\rho := \min\{a, b/M, 1/L\}$ statt $\rho := \min\{a, b/M\}$. Hierbei bedeutet $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ das à priori gewählte Rechteck, M das Betragsmaximum von f auf R und L die Lipschitzkonstante bzgl. des zweiten Argumentes.

Frage 4: Bei welchem zentralen Satz der Analysis wird der *Banach*sche Fixpunktsatz im Beweis ebenfalls benutzt?

Satz über die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion: Eine stetig differenzierbare Funktion besitzt in jedem Punkt mit invertierbarer Jacobi-Matrix eine lokale Inverse. Das Fixpunktargument wird verwendet, um die lokale Injektivität und Surjektivität nachzuweisen.

Frage 5: Warum verlangt der Satz von Arzela-Ascoli, daß die Funktionen auf einem Kompaktum definiert sind?

Im Beweis wird mit Hilfe des Diagonalfolgentricks eine zunächst nur auf einer abzählbaren, dichten Teilmenge des Definitionsbereichs konvergente Teilfolge generiert. Um zu zeigen, daß diese Folge tatsächlich auf der gesamten Definitionsmenge gleichmäßig konvergiert, benötigt man einen Kompaktheitsschluß.

Frage 6: Nenne die Teilschritte des Beweises vom *Peano*schen Existenzsatz.

1) Konstruiere mittels des *Euler*schen Polygonzugverfahrens eine Folge approximativer Lösungen.

2) Zeige, daß die so erhaltene Folge von Funktionen den Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli genügt, d.h. eine kompakte Teilmenge innerhalb der Menge der stetigen Funktionen auf einem vorher gewählten Zeitintervall darstellt.

3) Es existiert dann eine konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion eine Lösung des Anfangswertproblems sein muß.

Sonderfrage: Beweise den Satz des Pythagoras elementargeometrisch anhand einer Skizze und ohne Verwendung des Skalarprodukts.