Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1: Beweistraining - das Warum-Spiel

Einen **sorgfältigen** Beweis erkennen Sie daran, dass die **jede** noch so unscheinbaren Teilaussage durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Annahme begründet ist. Dabei beinhaltet die Rückführung natürlich die Überprüfung aller Vorraussetzungen in den Sätzen und Definitionen. Kontrollieren Sie Ihre eigenen Beweise auf Sorgfältigkeit, indem Sie **jeden** Teilschritt, **jede** Gleichung, **jede** Inklusion, usw. mit

Warum?

hinterfragen (in der Gruppe können Sie einen notorischen Warum-Frager auswählen). Wird nicht auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition oder eine Annahme verwiesen, hat Ihr Beweis eine Lücke, die gestopft werden muss.

Im Folgenden seien die Mengen D, E stets nicht leer und $f : D \to E$ sei eine Abbildung.

Definition 1. *Die Menge der Bilder zu $A \subset D$ ist definiert als $f(A) = \{y \,|\, \exists x \in A : y = f(x)\}$.*

- Verstanden? Überlegen Sie sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und geben Sie die Mengen $f(\{1, 2, 3\})$, $f([0, 1])$ und $f((-2, \infty))$ an.

Definition 2. *Die Menge der Urbilder zu $B \subset E$ ist definiert als $f^{-1}(B) = \{x \in D \,|\, f(x) \in B\}$.*

- Verstanden? Geben Sie für die Funktion $x \mapsto \cos(2\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}((0, 2))$ an.

Zum Umgang mit Mengen sei nochmal an folgende Definitionen erinnert (damit sie sorgfältig jeden Schritt in den folgenden Beweisen begründen können).

Definition 3. *Sei M eine Menge und für jedes $x \in M$ sei $U(x)$ eine Aussage. Dann gilt*

$$y \in \{x \in M \,|\, U(x)\} \quad \Leftrightarrow \quad y \in M \text{ und } U(y) \text{ ist wahr.}$$

Definition 4. *Seien A, B zwei Mengen. Dann gilt*

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : x \in B \qquad\qquad A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \;\wedge\; B \subset A$$
$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; x \in B \qquad\qquad x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\vee\; x \in B$$

- Zeigen Sie **sorgfältig**, dass für jede Teilmenge $A \subset D$ gilt $A \subset f^{-1}(f(A))$. Gilt sogar die Gleichheit?
- Zeigen Sie **sorgfältig**, dass für jede Teilmenge $B \subset E$ gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Gilt sogar die Gleichheit?
- Zeigen Sie **sorgfältig**, $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ und $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
- Zeigen Sie **sorgfältig**, $f(U \cup V) \subset f(U) \cup f(V)$ und $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.