Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 14

Aufgabe 1: Maximum an Sorgfalt

Die hier betrachteten Aussagen sind aus dem Leben gegriffen - genauer stammen Sie aus dem Umfeld der Aufgabe 4.3. Sie sollen uns hier als weiteres Beispiel für *sorgfältiges* Beweisen dienen. Letztlich können und sollten Sie *alle* mathematischen Aussagen so bearbeiten, wie es in der letzten MeGa Stunde geübt wurde, d.h. *jede* noch so unscheinbaren Teilaussage muss durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Annahme begründet werden (der Hinweis „Ist doch klar!" ist *nicht* zulässig).

Definition 1. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge. Die Zahl $M \in A$ für die $a \leq M$ für alle $a \in A$ gilt, wird* $\max A$ *genannt. Die Zahl $m \in A$ für die $m \leq a$ für alle $a \in A$ gilt, wird* $\min A$ *genannt.*

Definition 2. *Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $|a| = a$ im Fall $a \geq 0$ und $|a| = -a$ im Fall $a < 0$.*

Beweisen Sie nun mit maximaler Sorgfalt folgende Aussagen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Ist $a \leq c$ und $b \leq d$, so ist $\max\{a, b\} \leq \max\{c, d\}$.
2. $\max\{a, b\} = a$ falls $a \geq b$ und $\max\{a, b\} = b$ falls $a < b$.
3. $\max\{a, b\} = a + \max\{b - a, 0\}$.
4. $\max\{c, 0\} = (c + |c|)/2$.
5. $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$.
6. $\max\{a + c, b + d\} \leq \max\{a, b\} + \max\{c, d\}$.

Mit ähnlichen Schritten kann man $\min\{a + c, b + d\} \geq \min\{a, b\} + \min\{c, d\}$ zeigen, aber das ist wohl besser eine Hausaufgabe.

Aufgabe 2: Sorgfalt ist die Norm

Zur Erinnerung und zum sorgfältigen Beweisen noch einmal die Definition der Norm und ein nützlicher Satz:

Definition 3. *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: (a) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$, (b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und (c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.*

Satz 1. *Auf $\mathbb{R}^2$ ist $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ eine Norm.*

Zeigen Sie nun sorgfältig

1. Sind $\|\cdot\|_\circ$ und $\|\cdot\|_*$ Normen auf V, so ist auch $\|v\| = \max\{\|v\|_*, \|v\|_\circ\}$ eine Norm auf V. Hinweis: es ist $\|v\| = \|(\|v\|_*, \|v\|_\circ)\|_\infty$.
2. Wie ergibt sich die $\|\cdot\|$-Einheitskugel aus den Einheitskugeln der $\|\cdot\|_\circ$ und $\|\cdot\|_*$ Normen?

Wenn Sie im Kontext von Aufgabe 1 und 2 noch weiter experimentieren wollen, dann beweisen Sie doch einmal sorgfältig Satz 1.