Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

# Mathematik einüben in Gruppenarbeit
## Aufgabenblatt 15

**Aufgabe 1: Sorgfalt ist das halbe Mathematiker-Leben**

Beweisen Sie so sorgfältig wie möglich, d.h. *jede* noch so unscheinbaren Teilaussage muss durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung begründet werden (der Hinweis „Das ist halt so!“ ist *verboten*).

1. Seien $a, x \in \mathbb{R}$. Gilt für alle $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$, dass $a - \delta \leq x \leq a + \epsilon$, so ist $x = a$.

2. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Gilt für alle $\epsilon > 0$, dass $d(x, y) \leq \epsilon$, so folgt $x = y$.

**Aufgabe 2: Retten Sie die Mathematik durch Sorgfalt**

Hans Wurst stellt folgende Behauptung auf: *Die Mathematik ist widersprüchlich.* Überprüfen Sie den Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x - 2 \geq y - 1$. Dann gilt $x - y \geq 1$ und damit auch $(x - y)^2 \geq 1$. Setzt man speziell $x = 3$, so ergibt sich $(3 - y)^2 \geq 1$ bzw. $(y - 3)^2 \geq 1$, woraus $y - 3 \geq 1$ folgt. Also ist in diesem Fall $y \geq 4$.
Andererseits folgt aus $x - 2 \geq y - 1$ und $x = 3$ auch $y \leq 2$ - ein unauflösbarer Widerspruch. ∎

**Aufgabe 3: Sorgfaltifizierung**

Eine nicht untypische Situation: ein Satz wird in der Vorlesung schlampig formuliert und noch schlampiger bewiesen. Ihre Hausaufgabe ist dann, die Sache durch sorgfältiges Argumentieren zu retten. Übernehmen Sie dazu die entscheidenden Beweistricks, aber begründen Sie jede einzelne Teilaussage sorgfältig, d.h. durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung (Appelierung an die Intuition ist *verboten*). Hier ein Beispiel.

**Satz 1.** *Sei $X$ ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $f(X) \subset \mathbb{N}$, so ist $X$ unzusammenhängend.*

**Beweis:** Sei $n \in f(X)$ und $A = f^{-1}(\{n\})$. Dann ist $A$ abgeschlossen, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$. Außerdem ist $A$ als Urbild einer offenen Menge auch offen, denn $A = f^{-1}(\{n\}) = f^{-1}((n - \epsilon, n + \epsilon))$ für genügend kleines $\epsilon$. Damit enthält $X$ eine nicht-triviale Teilmenge, die offen *und* abgeschlossen ist und ist somit unzusammenhängend. ∎