Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 16

Aufgabe 1: Fortsetzung der Sorgfaltpredigt

Ein sorgfältiger Beweis zeichnet sich dadurch aus, dass *jede* Teilaussage durch einen klaren Verweis auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung begründet ist. Damit sind die Details eines sorgfältigen Beweises per Konstruktion für *jeden* unmittelbar verständlich! Wenn Sie dennoch einen Beweis nicht verstehen gibt es nur zwei mögliche Gründe:

1) Es wird behauptet eine Aussage sei wahr und Sie sehen nicht warum

In diesem Fall ist der Beweis *nicht* sorgfältig - es fehlen Verweise. Hier müssen Sie Ihren Stift zücken und den Beweis sorgfaltifizieren.

2) Sie können jede einzelne Aussage nachvollziehen, aber Sie verstehen nicht den Grund für die benutzte Aussagenkette.

Auch in diesem Fall brauchen Sie einen Stift, um z.B. jeden einzelnen Beweisschritt an einer Skizze oder einem Beispiel zu verfolgen, bis Sie die Beweisstrategie verstanden haben.

Üben Sie das Sorgfaltifizieren an folgendem Beispiel: Sei $X \neq \emptyset$ und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Durch $\mathcal{F}_b(X, Y)$ wird die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach Y bezeichnet, d.h. die Abbildungen $f : X \to Y$ für die $f(X)$ in Y beschränkt ist. Weiter sei

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)), \qquad f, g \in \mathcal{F}_b(X, Y).$$

Satz 1. *$(\mathcal{F}_b(X, Y), d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum genau dann, wenn (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum ist.*

Beweis: Man überzeugt sich leicht davon, dass d eine Metrik auf $\mathcal{F}_b(X, Y)$ ist. Nehmen wir nun an, dass $(\mathcal{F}_b(X, Y), d)$ vollständig ist. Ist (y_n) eine Cauchy Folge in Y dann wird durch $f_n : x \mapsto y_n$ eine Cauchy Folge (f_n) aus konstanten Funktionen in $\mathcal{F}_b(X, Y)$ definiert. Sei f der Grenzwert dieser Folge. Als Grenzwert konstanter Funktionen ist f auch konstant, d.h. $f(x) = y$ für alle $x \in X$. Es gilt also für beliebiges $x \in X$, dass $y_n = f_n(x) \to f(x) = y$, d.h. die Folge (y_n) konvergiert in Y und somit ist (Y, d_Y) vollständig. Ist umgekehrt (f_n) eine Cauchy Folge in $\mathcal{F}_b(X, Y)$, dann ist für jedes $x \in X$ die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))$ eine Cauchy Folge in Y und hat damit einen Grenzwert. Wir definieren $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und man zeigt leicht, dass f_n bezüglich der Metrik d gegen die Funktion f konvergiert. Damit ist $\mathcal{F}_b(X, Y)$ vollständig. ■

Hinweis: Beim sorgfältigen Argumentieren müssen Sie zwangsläufig mit sup umgehen, da die Metrik d über sup definiert ist. Dazu sei an die Definition des Supremums als kleinste obere Schranke erinnert sowie an folgende Charakterisierung:

Satz 2. *Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist $a = \sup A$ genau dann, wenn $x \leq a$ für alle x in A und falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ existiert, so dass $x \geq a - \epsilon$.*