



Mathematik einüben in Gruppenarbeit

Aufgabenblatt 17

Aufgabe 1: Sorgfaltzrng

Ein unsorgfältiger Beweis ist wie ein Text ohne Vokale: man kann den Sinn zwar so ungefähr nachvollziehen, br rchtg vrstndlich wrd s rst, wnn d Vkl dzgschrbn wrdn. (das war der Satz: aber richtig verständlich wird es erst, wenn die Vokale dazugeschrieben werden.) Inzwischen kennen Sie den Spruch schon auswendig: in einem sorgfältigen Beweis wird *jede* noch so unscheinbare Teilaussage auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung zurückgeführt (alle anderen Begründungsversuche (d.h. Beweise durch Überreden) sind *verboten*).

Üben Sie das Sorgfaltifizieren von Aussage und Beweis an folgendem Beispiel. Zuerst aber die benötigten Definitionen, um die Aussage zu verstehen.

Definition 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn für jeden Punkt $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls A^c offen ist. Die Menge ∂A enthält alle Punkte $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass alle offenen Mengen U die x enthalten einen nichtleeren Schnitt mit A und A^c haben. Schließlich heißt X *zusammenhängend*, falls \emptyset und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Satz 1. Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und A eine echte Teilmenge von X . Dann gilt $\partial A \neq \emptyset$.

Beweis: Angenommen $\partial A = \emptyset$. Dann ist A abgeschlossen. Außerdem ist wegen $\partial A = \partial A^c$ das Komplement A^c auch abgeschlossen. Damit ist A offen im Widerspruch zur Voraussetzung, dass X zusammenhängend ist. Also gilt $\partial A \neq \emptyset$. ■

Nachdem Sie Satz und Beweis sorgfaltifiziert haben, denken Sie darüber nach, ob die Aussage die anschauliche Vorstellung präzisiert, dass beschränkte Mengen in normierten Räumen Ränder haben?

Bemerkung: Formulieren Sie eine entsprechende Behauptung und beweisen Sie sie sorgfältig. Denken Sie daran, dass zur Anwendung eines Satzes alle Voraussetzungen *sorgfältig* zu prüfen sind. Außerdem sind beim Präzisieren anschaulicher Vorstellungen oft Zusatzvoraussetzungen erforderlich, da die Normalbürger-Vorstellung nicht alle Sonderfälle umfasst.