Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 18

Aufgabe 1: Sie wissen schon ...

Es ist schön, wenn Sie Teilaussagen in einem Beweis intuitiv verstehen. Aber fragen Sie sich auch in einem solchen Fall, wie die Aussage auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung zurückgeführt werden kann. Wenn Sie sich daran gewöhnt haben, *immer* nach diesem Muster vorzugehen, dann stört Sie irgendwann auch nicht mehr, dass Sie eine Aussage nicht auf Anhieb intuitiv verstehen. Sie wissen dann ja, was zu tun ist: irgendwie (und hier ist Ihre Kreativität einzusetzen) muss die Aussage auf Axiome, Sätze, Definitionen, oder Voraussetzungen zurückgeführt werden.

Üben Sie das Sorgfaltifizieren an folgendem Beispiel. Es geht dabei um die Menge der reellen, quadratsummierbaren Folgen

$$l_2 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

mit den wie üblich termweise definierten Rechenoperationen $(a+b)_n = a_n + b_n$ und $(\lambda a)_n = \lambda a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei für $a \in l_2$

$$\|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Satz 1. $(l_2, \|\cdot\|_2)$ *ist ein normierter Vektorraum, in dem die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt ist.*

Beweis: Die Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Normeigenschaften der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^N$ und der Grenzwerteigenschaft

$$\|a\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|a\|_{2,N}, \qquad \|a\|_{2,N} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Folgen $e^{(i)}$ mit $i = 1, 2, 3, \ldots$ definiert durch

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

haben jeweils Norm 1 und gegenseitigen Abstand $\sqrt{2}$. Deshalb lässt sich aus der Überdeckung der abgeschlossenen Einheitskugel mit den Kugeln $B_{\frac{1}{2}}(x)$, $x \in \overline{B_1(0)}$ keine endliche Überdeckung auswählen. ■