Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 19

Aufgabe 1: Per Definition: sorgfältig

Diesmal geht es um sorgfältiges Anwenden von Definitionen. Zum Aufwärmen sei an die Konvergenzdefinition erinnert:

Definition 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge konvergiert gegen $x \in X$ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.*

Zeigen Sie durch sorgfältige Anwendung der Definition folgenden Satz.

Satz 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Weiter seien $\alpha, \gamma > 0$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $x \in X$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit $d(x_n, x) < \gamma\epsilon$ für alle $n \geq \alpha N$.*

Damit Sie wissen, was ich meine, hier die erste Hälfte des Beweises als Beispiel:

Beweishälfte: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\epsilon > 0$. Dann ist auch $\tilde{\epsilon} = \gamma\epsilon > 0$ und nach Definition existiert $x \in X$ und $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \tilde{\epsilon}$ falls $n \geq \tilde{N}$. Im Fall $\alpha \geq 1$ wählt man $N = \tilde{N}$. Falls $\alpha < 1$ wählt man N z.B. als die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\tilde{N}/\alpha$ ist. In jedem Fall gilt dann $\alpha N \geq \tilde{N}$ und somit $d(x_n, x) < \gamma\epsilon$ falls $n \geq \alpha N$.

Die andere Richtung können Sie jetzt sicher selbst machen und anschließend den folgenden Satz nach dem gleichen Sorgfältigkeitsmuster beweisen. Auch hier nochmal zur Erinnerung die Definition.

Definition 2. *Seien X, Y endlichdimensionale normierte Räume, $\emptyset \neq U \subset X$ offen, $x \in U$ und $U_x = \{h \in X | x + h \in U\}$. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt differenzierbar in x, falls eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ existiert und eine Funktion $r(x, \cdot) : U_x \to Y$, die in $0 \in U_x$ stetig ist und dort den Wert 0 annimmt, so dass*

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\|r(x, h), \qquad h \in U_x.$$

Satz 2. *Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x \in U$ differenzierbar, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U$ so dass $f|_{B_\epsilon(x)}$ in x differenzierbar ist.*