Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 20

Aufgabe 1: Explizite Sorgfalt beim impliziten Ableiten

Gesucht ist das Maximum einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter gewissen Nebenbedingungen die durch $m < n$ Funktionen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschrieben sind. Die zulässigen Punkte sind definiert durch die Bedingungen

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x)) = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m) = \bar{c}$$

wobei $\bar{c} \in \mathbb{R}^m$ ein vorgegebener Vektor ist. Nehmen wir an, dass für die Vektoren c in einer Umgebung von $\bar{c}$ das Maximierungsproblem unter den Nebenbedingungen $g(x) = c$ jeweils genau eine Lösung hat, die wir mit $X(c)$ bezeichnen und dass X in $\bar{c}$ differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitungen des maximalen Funktionswertes $M(c) = f(X(c))$ an der Stelle $\bar{c}$. Welche Bedeutung hat $M'(\bar{c})h$ für $h \in \mathbb{R}^m$? Beachten Sie bei Ihrer sorgfältigen Rechnung, dass nach dem Satz über die Optimierung unter Nebenbedingungen ein Vektor $\Lambda(\bar{c})$ existiert, so dass $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot (g(x) - c)$ einen kritischen Punkt an der Stelle $(X(\bar{c}), \Lambda(\bar{c}))$ hat.

Denken Sie in einem zweiten Schritt darüber nach, ob die Forderung der Differenzierbarkeit nötig ist. Muss $c \mapsto X(c)$ nicht automatisch glatt sein? Hinweis: Finden Sie, eine geeignete Bedingung $\Phi(x, \lambda, c) = 0$, die (unter anzugebenden Voraussetzungen) lokal eindeutig in der Form $\Phi(X(c), \Lambda(c), c) = 0$ aufgelöst werden kann. Der Satz über implizite Funktionen liefert dann die Glattheit.