Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1: Beweistraining - das Warum-Spiel

Einen **sorgfältigen** Beweis erkennen Sie daran, dass **jede** noch so unscheinbaren Teilaussage durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Annahme begründet ist. Dabei beinhaltet die Rückführung natürlich die Überprüfung aller Vorraussetzungen in den Sätzen und Definitionen. Kontrollieren Sie Ihre eigenen Beweise auf Sorgfältigkeit, indem Sie **jeden** Teilschritt, **jede** Gleichung, **jede** Inklusion, usw. mit

Warum?

hinterfragen (in der Gruppe können Sie einen notorischen Warum-Frager auswählen). Wird nicht auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition oder eine Annahme verwiesen, hat Ihr Beweis eine Lücke, die gestopft werden muss.

Im Folgenden seien die Mengen D, E stets nicht leer und $f : D \to E$ sei eine Abbildung.

Definition 1. *Die Menge der Bilder zu $A \subset D$ ist definiert als $f(A) = \{y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$.*

- Verstanden? Überlegen Sie sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und geben Sie die Mengen $f(\{1, 2, 3\})$, $f([0, 1])$ und $f((-2, \infty))$ an.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$, $f([0, 1]) = [0, 1]$ und $f((-2, \infty)) = [0, \infty)$. Im letzten Beispiel sehen Sie noch einmal, dass das Bild einer offenen Menge, hier ist es $(-2, \infty)$, unter einer stetigen Abbildung f nicht offen sein muss. Im vorliegenden Fall ist die Bildmenge $[0, \infty)$ z.B. abgeschlossen.

Definition 2. *Die Menge der Urbilder zu $B \subset E$ ist definiert als $f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}$.*

- Verstanden? Geben Sie für die Funktion $x \mapsto \cos(2\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}((0, 2))$ an.

Da zum Funktionswert 3 kein Urbild gehört, ist $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$. Der Maximalwert 1 wird von der Kosinusfunktion dagegen an allen Vielfachen von 2π angenommen, also $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z}$. Schließlich ist $f^{-1}((0, 2)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi k + (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$.

Zum Umgang mit Mengen sei nochmal an folgende Definitionen erinnert (damit sie sorgfältig jeden Schritt in den folgenden Beweisen begründen können).

Definition 3. *Sei M eine Menge und für jedes $x \in M$ sei $U(x)$ eine Aussage. Dann gilt*

$$y \in \{x \in M \mid U(x)\} \quad \Leftrightarrow \quad y \in M \text{ und } U(y) \text{ ist wahr.}$$

Definition 4. *Seien A, B zwei Mengen. Dann gilt*

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : x \in B \qquad\qquad A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \,\wedge\, B \subset A$$
$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \,\wedge\, x \in B \qquad\qquad x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \,\vee\, x \in B$$

- Zeigen Sie **sorgfältig**, dass für jede Teilmenge $A \subset D$ gilt $A \subset f^{-1}(f(A))$. Gilt sogar die Gleichheit?

Wir wollem zeigen, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\forall x \in A : x \in f^{-1}(f(A)).$$

Warum? Wegen der Definition der Teilmengenbeziehungen (Def. 4).
Sei also $x \in A$. Wir müssen nun nachweisen, dass $x \in f^{-1}(B)$ ist, wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die Abkürzung $B = f(A)$ eingeführt haben. Dieser unscheinbare Trick ist sehr wichtig, wie Sie jetzt sehen werden. Er erlaubt uns eine klare und offensichtliche Anwendung der Definition 2, die besagt

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \,|\, f(x) \in B\}.$$

Die nachzuweisende Eigenschaft $x \in f^{-1}(B)$ lässt sich also umformulieren in die Aussage

$$x \in D \wedge f(x) \in B.$$

Warum? Wegen Definition (Def. 3).
Nun wissen wir aber dass $x \in D$ ist.
Warum? Wegen der Annahme $x \in A$ und der Annahme $A \subset D$.
Es bleibt somit zu zeigen, dass $y = f(x)$ in B liegt. Hier haben wir wieder eine Abkürzung y eingeführt, damit die zu erledigende Aufgabe klarer hervortritt (die genaue Form von y werden wir später natürlich brauchen, um die Frage $y \in B$ zu beantworten - um die Frage zu stellen, ist es aber geschickter, Teile der Antwort erst einmal auszublenden). Liegt also y in der Menge $B = f(A)$? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir schauen, was $f(A)$ eigentlich bedeutet. Nach Def. 1 ist

$$f(A) = \{z \in E \,|\, \exists u \in A : z = f(u)\}.$$

Beachten Sie hier, dass wir die Definition noch einmal abgeschrieben haben, dabei aber peinlich darauf geachtet haben, den in der Definition auftretenden Variablen nur solche Namen zu geben, die noch nicht im laufenden Beweis benutzt werden. Die Frage $y \in f(A)$ reduziert sich also auf die Überprüfung, ob $y \in E$ gilt und ob $y = f(u)$ ist für ein geeignetes $u \in A$.
Warum? Wegen Definition (Def. 3).
Heben wir nun unsere Abkürzung $y = f(x)$ wieder auf, so sehen wir, dass die Überprüfung erfolgreich ist. Es gilt nämlich $x \in A$ (**Warum?** Nach Annahme.), und $f(x) \in E$ (**Warum?** Nach Definition von $f : D \to E$). Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $x \in f^{-1}(f(A))$ ist, womit die Ausgangsbehauptung bewiesen ist. ■

Gleichheit gilt übrigens nicht wie das Beispiel $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ mit $A = (0, 1)$ zeigt. Hier ist $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R}$ echt größer als A.

- Zeigen Sie **sorgfältig**, dass für jede Teilmenge $B \subset E$ gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Gilt sogar die Gleichheit?

Nach der ausführlichen Variante, hier nun eine etwas knappere Fassung, bei der die Warum-Fragen beantwortet werden, bevor sie gestellt werden müssen.

Def. 4 der Teilmengenbeziehung besagt dass wir für beliebiges $y \in f(f^{-1}(B))$ zeigen müssen, dass auch $y \in B$ gilt. Nach Def. 1 und Def. 3 bedeutet $y \in f(C)$ mit $C = f^{-1}(B)$, dass $y \in E$ und $y = f(x)$ für ein $x \in C$. Weiter bedeutet $x \in C = f^{-1}(B)$ nach Def. 2 und Def. 3, dass $f(x) \in B$ ist. Also ist $y = f(x) \in B$, was zu zeigen war. ■

Auch hier gilt ohne weitere Voraussetzungen keine Gleichheit, wie das Beispiel $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ mit $B = \mathbb{R}$ zeigt. Tatsächlich ist $f(f^{-1}(B)) = \{0\}$ echt kleiner als $B = \mathbb{R}$.

Die übrigen Aufgaben funktionieren nach dem gleichen Strickmuster und sollten nun von Ihnen alleine gemeistert werden können.

- Zeigen Sie **sorgfältig**, $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ und $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
- Zeigen Sie **sorgfältig**, $f(U \cup V) \subset f(U) \cup f(V)$ und $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.