Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 14

Aufgabe 1: Maximum an Sorgfalt

Die hier betrachteten Aussagen sind aus dem Leben gegriffen - genauer stammen Sie aus dem Umfeld der Aufgabe 4.3. Sie sollen uns hier als weiteres Beispiel für *sorgfältiges* Beweisen dienen. Letztlich können und sollten Sie *alle* mathematischen Aussagen so bearbeiten, wie es in der letzten MeGa Stunde geübt wurde, d.h. *jede* noch so unscheinbaren Teilaussage muss durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Annahme begründet werden (der Hinweis „Ist doch klar!“ ist *nicht* zulässig).

Definition 1. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge. Die Zahl $M \in A$ für die $a \leq M$ für alle $a \in A$ gilt, wird* $\max A$ *genannt. Die Zahl $m \in A$ für die $m \leq a$ für alle $a \in A$ gilt, wird* $\min A$ *genannt.*

Definition 2. *Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $|a| = a$ im Fall $a \geq 0$ und $|a| = -a$ im Fall $a < 0$.*

Beweisen Sie nun mit maximaler Sorgfalt folgende Aussagen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Ist $a \leq c$ und $b \leq d$, so ist $\max\{a, b\} \leq \max\{c, d\}$.
   Nach Annahme und Definition 1 gilt $a \leq c \leq \max\{c, d\}$ und $b \leq d \leq \max\{c, d\}$. Da $\max\{a, b\} \in \{a, b\}$ (Def 1) folgt somit auch $\max\{a, b\} \leq \max\{c, d\}$.

2. $\max\{a, b\} = a$ falls $a \geq b$ und $\max\{a, b\} = b$ falls $a < b$.
   Sei $a \geq b$. Dann ist $b \leq a$ und $a \leq a$, so dass $\max\{a, b\} = a$ nach Definition 1. Im Fall $a < b$ gilt $a \leq b$ und $b \leq b$, so dass $\max\{a, b\} = b$ wieder nach Definition 1.

3. $\max\{a, b\} = a + \max\{b - a, 0\}$.
   Sei zunächst $a \geq b$. Dann gilt $b-a \leq 0$ und nach Aussage (2) erhalten wir $\max\{b-a, 0\} = 0$. Wenn jetzt keine weitere Begründung käme, wäre der Beweis nicht sorgfältig! Also etwas genauer. Wir setzen $c = 0$ und $d = b - a$. Dann gilt $c \geq d$ so dass mit (2) die Aussage $\max\{c, d\} = c$ folgt, d.h. $\max\{0, b - a\} = 0$. Benutzen wir nun noch, dass die Reihenfolge der Elementaufzählung bei Mengen keine Rolle spielt (dahinter steckt *auch* eine Definition und zwar die der Mengennotation), so folgt schließlich $\max\{b - a, 0\} = 0$. Also ist $a = a + 0 = a + \max\{0, b - a\}$. Da wegen (2) aber im Fall $a \geq b$ auch $\max\{a, b\} = a$ gilt, folgt die Behauptung für diesen Fall. Der zweite Fall $a < b$ verläuft analog: es gilt mit (2) $\max\{b - a, 0\} = \max\{0, b - a\} = b - a$ und $\max\{a, b\} = b$, so dass wieder $\max\{a, b\} = b = a + (b - a) = a + \max\{b - a, 0\}$ richtig ist.

4. $\max\{c, 0\} = (c + |c|)/2$.
   Sei $c \geq 0$. Dann gilt mit (2) durch Setzen von $a = c$, $b = 0$, dass $\max\{c, 0\} = c$. Nach Definition 2 folgt $|c| = c$, so dass $(c + |c|)/2 = (c + c)/2 = c$. Damit ergibt sich $\max\{c, 0\} = c = (c + |c|)/2$. Im Fall $c < 0$ ist wieder mit (2) $\max\{c, 0\} = 0$ und $|c| = -c$ nach Definition 2, d.h. $(c + |c|)/2 = 0$, wodurch sich auch in diesem Fall die Behauptung ergibt.

5. $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$.
   Wir benutzen (3) und (4) mit $c = b - a$
   $$\max\{a, b\} = a + \max\{b - a, 0\} = a + \frac{b - a + |b - a|}{2} = \frac{a + b + |b - a|}{2}.$$
   Nun ist noch zu beachten, dass $|-c| = |c|$ gilt - d.h. wir benutzen einen Satz über den Absolutbetrag, um die genaue Form der Behauptung zu erhalten. Beachten Sie, dass beim Bruchrechnen diverse Axiome und Definitionen (Bruchdarstellung) eingeflossen sind.

6. $\max\{a+c, b+d\} \leq \max\{a,b\} + \max\{c,d\}$.
   Wir benutzen (5) mit $a+c$ an der Stelle von a und $b+d$ an der Stelle von d, sowie die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag (und die Axiome der reellen Zahlen zum Rechnen).

$$\max\{a{+}c, b{+}d\} = \frac{(a+c)+(b+d)+|(a+c)-(b+d)|}{2} \leq \frac{a+b+c+d+|a-b|+|c-d|}{2}$$

   Damit haben wir

$$\max\{a+c, b+d\} \leq \frac{a+b+|a-b|}{2} + \frac{c+d+|c-d|}{2}$$

   und erneute zweifache Anwendung von (5) liefert das Ergebnis.

Mit ähnlichen Schritten kann man $\min\{a+c, b+d\} \geq \min\{a,b\} + \min\{c,d\}$ zeigen, aber das ist wohl besser eine Hausaufgabe.

Aufgabe 2: Sorgfalt ist die Norm

Zur Erinnerung und zum sorgfältigen Beweisen noch einmal die Definition der Norm und ein nützlicher Satz:

Definition 3. *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: (a) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$, (b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und (c) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.*

Satz 1. *Auf $\mathbb{R}^2$ ist $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ eine Norm.*

Zeigen Sie nun sorgfältig

1. Sind $\|\cdot\|_\circ$ und $\|\cdot\|_*$ Normen auf V, so ist auch $\|v\| = \max\{\|v\|_*, \|v\|_\circ\}$ eine Norm auf V.
   Hinweis: es ist $\|v\| = \|(\|v\|_*, \|v\|_\circ)\|_\infty$.
   Wir beweisen zunächst Eigenschaft (a). Sei dazu $\|v\| = 0$, d.h. $\|(\|v\|_*, \|v\|_\circ)\|_\infty = 0$. Da $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist, folgt mit Definition 3, dass $(\|v\|_*, \|v\|_\circ)$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^2$ ist. Also ist auch $\|v\|_* = 0$. Da $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf V ist, folgt $v = 0$ mit Definition 3. Als nächstes zeigen wir (b). Sei dazu $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit Definition 3 folgt

$$(\|\lambda v\|_*, \|\lambda v\|_\circ) = (|\lambda|\|v\|_*, |\lambda|\|v\|_\circ) = |\lambda|(\|v\|_*, \|v\|_\circ).$$

   Mit Satz 1 gilt daher $\|\lambda v\| = \|(\|\lambda v\|_*, \|\lambda v\|_\circ)\|_\infty = |\lambda|\|(\|v\|_*, \|v\|_\circ)\|_\infty = |\lambda|\|v\|$. Schließlich beweisen wir die Dreiecksungleichung. Seien dazu $v, w \in V$. Mit Definition 3 ist

$$\|v+w\|_* \leq \|v\|_* + \|w\|_*, \qquad \|v+w\|_\circ \leq \|v\|_\circ + \|w\|_\circ$$

   und mit (1) aus Aufgabe 1 folgt

$$\|v+w\| = \max\{\|v+w\|_*, \|v+w\|_\circ\} \leq \max\{\|v\|_* + \|w\|_*, \|v\|_\circ + \|w\|_\circ\}.$$

   Benutzt man die Dreiecksungleichung für die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^2$ angewendet auf den Vektor

$$(\|v\|_* + \|w\|_*, \|v\|_\circ + \|w\|_\circ) = (\|v\|_*, \|v\|_\circ) + (\|w\|_*, \|w\|_\circ)$$

   so folgt die Behauptung.

2. Wie ergibt sich die $\|\cdot\|$-Einheitskugel aus den Einheitskugeln der $\|\cdot\|_\circ$ und $\|\cdot\|_*$ Normen?
   Es gilt $\|v\| \leq 1$ genau dann, wenn sowohl $\|v\|_\circ \leq 1$ als auch $\|v\|_* \leq 1$ gilt. Die Einheitskugel ist also die Schnittmenge der beiden Einheitskugeln.

Wenn Sie im Kontext von Aufgabe 1 und 2 noch weiter experimentieren wollen, dann beweisen Sie doch einmal sorgfältig Satz 1.