Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 15

Aufgabe 1: Sorgfalt ist das halbe Mathematiker-Leben

Beweisen Sie so sorgfältig wie möglich, d.h. *jede* noch so unscheinbaren Teilaussage muss durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung begründet werden (der Hinweis „Das ist halt so!“ ist *verboten*).

1. Seien $a, x \in \mathbb{R}$. Gilt für alle $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$, dass $a - \delta \leq x \leq a + \epsilon$, so ist $x = a$.
   Wir beweisen durch Widerspruch. Angenommen $x \neq a$. Aus den Anordnungsaxiomen (AO) folgt, dass dann $x < a$ oder $a < x$ gelten muss. Im ersten Fall ist $\delta = (a - x)/2$ strikt positiv (AO benutzt), so dass nach Voraussetzung $a - \delta \leq x$ gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass $a - \delta = a - (a - x)/2 = (a + x)/2 = x + \delta > x$. Entsprechendes gilt im Fall $a < x$, wo man $\epsilon = (x - a)/2 > 0$ wählt, woraus $a + \epsilon = (x + a)/2 = x - \epsilon < x$ folgt im Widerspruch zur Voraussetzung $x \leq a + \epsilon$.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Gilt für alle $\epsilon > 0$, dass $d(x, y) \leq \epsilon$, so folgt $x = y$.
   Zunächst folgt wegen $d(x, y) \geq 0$ (Satz über Metrik), dass $d(x, y) \geq -\delta$ für alle $\delta > 0$. Es gilt somit für $u = d(x, y)$ und alle $\epsilon, \delta > 0$, dass $0 - \delta \leq u \leq 0 + \epsilon$. Wendet man (1) an (dies ist ein *sorgfältiger* Verweis auf einen Satz, d.h. die Aussage wurde durch Einführung von u und δ so umgeformt, dass die Überprüfung der Voraussetzungen ohne Denkakrobatik erledigt werden kann), so folgt $0 = u = d(x, y)$. Aus der ersten Metrikeigenschaft (dies ist ein Verweis auf eine Definition) folgt dann $x = y$.

Aufgabe 2: Retten Sie die Mathematik durch Sorgfalt

Hans Wurst stellt folgende Behauptung auf: *Die Mathematik ist widersprüchlich.* Überprüfen Sie den Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x - 2 \geq y - 1$. Dann gilt $x - y \geq 1$ und damit auch $(x - y)^2 \geq 1$. Setzt man speziell $x = 3$, so ergibt sich $(3 - y)^2 \geq 1$ bzw. $(y - 3)^2 \geq 1$, woraus $y - 3 \geq 1$ folgt. Also ist in diesem Fall $y \geq 4$.
Andererseits folgt aus $x - 2 \geq y - 1$ und $x = 3$ auch $y \leq 2$ - ein unauflösbarer Widerspruch. ∎

Der Fehler im Beweis ist an der Stelle $(y-3)^2 \geq 1 \Rightarrow y-3 \geq 1$. Diese Aussage ist nämlich falsch, wie das Beispiel $y = 0$ zeigt. (Bemerkung: ein korrekter Schluss wäre $(y-3)^2 \geq 1 \Rightarrow |y-3| \geq 1$.)

Aufgabe 3: Sorgfaltifizierung

Eine nicht untypische Situation: ein Satz wird in der Vorlesung schlampig formuliert und noch schlampiger bewiesen. Ihre Hausaufgabe ist dann, die Sache durch sorgfältiges Argumentieren zu retten. Übernehmen Sie dazu die entscheidenden Beweistricks, aber begründen Sie jede einzelne Teilaussage sorgfältig, d.h. durch Rückführung auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung (Appelierung an die Intuition ist *verboten*). Hier ein Beispiel.

Satz 1. *Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $f(X) \subset \mathbb{N}$, so ist X unzusammenhängend.*

Beweis: Sei $n \in f(X)$ und $A = f^{-1}(\{n\})$. Dann ist A abgeschlossen, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$. Außerdem ist A als Urbild einer offenen Menge auch offen, denn $A = f^{-1}(\{n\}) = f^{-1}((n - \epsilon, n + \epsilon))$ für genügend kleines ϵ. Damit enthält X eine nicht-triviale Teilmenge, die offen *und* abgeschlossen ist und ist somit unzusammenhängend. ∎

Wir gehen zunächst den Beweis sorgfältig durch. Dabei merken wir automatisch, ob an der Formulierung des Satzes etwas geändert werden muss.

1. Wir beginnen mit der Aussage *sei* $n \in f(X)$. Diese Aussage ist nur dann wahr, wenn $f(X) \neq \emptyset$. Der Fall $f(X) = \emptyset$ kann aber eintreten, wenn $X = \emptyset$ ist. Wird in der benutzten Definition des metrischen Raumes die Situation $X \neq \emptyset$ verlangt, wäre dies ausgeschlossen. Sicherheitshalber werden wir aber in der Neuformulierung die Bedingung $X \neq \emptyset$ einbauen.

2. Die durch $A = f^{-1}(\{n\})$ gegebene Menge ist abgeschlossen in X, denn sie ist das Urbild des in $\mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik abgeschlossenen Intervalls $[n, n] = \{n\}$ unter der stetigen Funktion f. Hier werden also zwei Sätze bemüht.

3. Da $n \in f(X)$ folgt nach Definition der Bildmenge, dass ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = n$. Nach Definition der Urbildmenge $f^{-1}(\{n\})$ folgt daraus $x \in f^{-1}(\{n\}) = A$. Also gilt $A \neq \emptyset$. Die beiden Definitionen waren auf Blatt 13 Ausgangspunkt für sorgfältige Beweise.

4. Bei der Aussage $A \neq X$ hakt es jetzt aber wirklich. Diese Aussage kann nämlich unter den gegebenen Voraussetzungen gar nicht bewiesen werden! Denken Sie etwa an das Beispiel der konstanten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Bild ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ aber der Raum $X = \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Den langweiligen Fall der konstanten Funktion hatte der Autor des Satzes aber sicherlich nicht im Sinn. Vielmehr suggeriert der Beweis, dass an nicht-konstante Funktionen gedacht wurde. In unserer Neufassung werden wir diese Bedingung also mitaufnehmen. Nehmen wir an, dass f nicht konstant ist, so gibt es neben $n \in f(X)$ also noch ein weiteres Element $m \neq n$ in $f(X)$. Auch diese Aussage muss begründet sein - am besten durch einen kleinen Widerspruchsbeweis: wäre $k = n$ für alle $k \in f(X)$, so wäre f konstant im Widerspruch zur Voraussetzung. Zu $m \in f(X)$ gibt es aber $y \in X$ mit $f(y) = m$ (Definition der Bildmenge). Wäre $y \in A$, so wäre gleichzeitig $f(y) = n$ im Widerspruch mit der Definition der Abbildung als eindeutiger Zuordnungsvorschrift. Also $y \notin A$ und folglich kann nicht $A = X$ gelten, denn nach Definition der Mengengleichheit wäre dann $y \in X \Rightarrow y \in A$ eine wahre Aussage.

5. Um zu zeigen, dass A auch offen ist folgen wir der angegebene Idee - nur etwas sorgfältiger. Wir zeigen $A = f^{-1}((n - \epsilon, n + \epsilon))$ mit $\epsilon = 1/2$ (wobei das *genügend klein* Gemurmel durch eine präzise Wahl von ϵ ersetzt wurde). Eine wie hier postulierte Mengengleichheit beweist man in der Regel durch den Nachweis zweier Inklusionen. Sei dazu $x \in A$. Aus der Definition von A als Urbildmenge folgt $f(x) = n$. Da $n \in (n - \epsilon, n + \epsilon)$ folgt wiederum mit der Definition der Urbildmenge $x \in f^{-1}((n - \epsilon, n + \epsilon))$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $w \in f^{-1}((n-\epsilon, n+\epsilon))$, d.h. $f(w) \in (n-\epsilon, n+\epsilon)$. Da außerdem $f(w) \in f(X) \subset \mathbb{N}$ folgt $f(w) \in (n - \epsilon, n + \epsilon) \cap \mathbb{N} = \{n\}$, also $f(w) = n$. Wiederum mit der Definition von A folgt $w \in A$ also die zweite Inklusion.
   Benutzt man nun den Satz, dass $(n - \epsilon, n + \epsilon)$ in $\mathbb{R}$ offen ist und dass Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen offen sind, so folgt die Offenheit von A.

6. Nun ist insgesamt $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, A offen und A abgeschlossen. Damit genügt der metrische Raum X einer Charakterisierung des Begriffs *unzusammenhängend.*

Zum Abschluss formulieren wir eine sorfältige Fassung des Satzes.

Satz 2. *Auf* $X \neq \emptyset$ *sei eine Metrik und eine Abbildung* $f : X \to \mathbb{R}$ *gegeben die stetig ist bezüglich der Standardmetrik auf* $\mathbb{R}$*. Ist* f *nicht konstant und* $f(X) \subset \mathbb{N}$*, so ist* X *unzusammenhängend.*