Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 16

Aufgabe 1: Fortsetzung der Sorgfaltpredigt

Ein sorgfältiger Beweis zeichnet sich dadurch aus, dass *jede* Teilaussage durch einen klaren Verweis auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung begründet ist. Damit sind die Details eines sorgfältigen Beweises per Konstruktion für *jeden* unmittelbar verständlich! Wenn Sie dennoch einen Beweis nicht verstehen gibt es nur zwei mögliche Gründe:

1) Es wird behauptet eine Aussage sei wahr und Sie sehen nicht warum

In diesem Fall ist der Beweis *nicht* sorgfältig - es fehlen Verweise. Hier müssen Sie Ihren Stift zücken und den Beweis sorgfaltifizieren.

2) Sie können jede einzelne Aussage nachvollziehen, aber Sie verstehen nicht den Grund für die benutzte Aussagenkette.

Auch in diesem Fall brauchen Sie einen Stift, um z.B. jeden einzelnen Beweisschritt an einer Skizze oder einem Beispiel zu verfolgen, bis Sie die Beweisstrategie verstanden haben.

Üben Sie das Sorgfaltifizieren an folgendem Beispiel: Sei $X \neq \emptyset$ und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Durch $\mathcal{F}_b(X, Y)$ wird die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach Y bezeichnet, d.h. die Abbildungen $f : X \to Y$ für die $f(X)$ in Y beschränkt ist. Weiter sei

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)), \qquad f, g \in \mathcal{F}_b(X, Y).$$

Satz 1. *$(\mathcal{F}_b(X, Y), d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum genau dann, wenn (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum ist.*

Hinweis: Beim sorgfältigen Argumentieren müssen Sie zwangsläufig mit sup umgehen, da die Metrik d über sup definiert ist. Dazu sei an die Definition des Supremums als kleinste obere Schranke erinnert sowie an folgende Charakterisierung:

Satz 2. *Sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist $a = \sup A$ genau dann, wenn $x \leq a$ für alle x in A und falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ existiert, so dass $x \geq a - \epsilon$.*

Beweis Satz 1: Man überzeugt sich leicht davon, dass d eine Metrik auf $\mathcal{F}_b(X, Y)$ ist.
$\to$ Hier muss natürlich gearbeitet werden. Seien $f, g \in \mathcal{F}_b$. Dann gibt es $R_f, R_g \in (0, \infty)$ und $y_f, y_g \in Y$, so dass $f(X) \subset B_{R_f}(y_f)$ und $g(X) \subset B_{R_g}(y_g)$. Insbesondere folgt für jedes $x \in X$ durch mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), y_f) + d_Y(y_f, y_g) + d_Y(y_g, g(x)) \leq R_f + d_Y(y_f, y_g) + R_g \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass $d_Y(y_f, y_g) \in \mathbb{R}$ gilt, da d_Y die Menge $Y \times Y$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Die Definition des Supremums als kleinste obere Schranke ergibt

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \leq R_f + d_Y(y_f, y_g) + R_g.$$

Damit haben wir gezeigt, dass d die Menge $\mathcal{F}_b(X, Y) \times \mathcal{F}_b(X, Y)$ wie von einer Metrik gefordert nach $\mathbb{R}$ abbildet. Im Fall $f = g$ ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ so dass $d_Y(f(x), g(x)) = 0$, da d_Y eine Metrik ist. Mit der Charakterisierung Satz 2 sieht man, dass $\sup\{0\} = 0$ gilt, also $d(f, f) = 0$. Ist umgekehrt $d(f, g) = 0$ so zeigt die Charakterisieierung, dass $d_Y(f(x), g(x)) \leq 0$ für jedes $x \in X$. Mit der auf MeGa-Blatt 15 bewiesenen Aussage folgt sofort $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in X$, d.h. $f = g$. Die Symmetrie von d folgt aus der Symmetrie von d_Y. Da $d_Y(f(x), g(x)) = d_Y(g(x), f(x))$ sind die beiden Mengen $\{d_Y(f(x), g(x)) | x \in X\}$ und $\{d_Y(g(x), f(x)) | x \in X\}$ identisch (wer's nicht glaubt hat Recht und beweist die Gleichheit z.B. durch zwei Inklusionen). Folglich sind auch die Suprema identisch (wegen Eindeutigkeit des Supremums), so dass schließlich $d(f,g) = d(g,f)$. Die Dreiecksungleichung folgt ebenfalls aus der Dreiecksungleichung für d_Y. Seien $f, g, h \in \mathcal{F}_b(X,Y)$. Dann gilt für jedes $x \in X$

$$d_Y(f(x), h(x)) \leq d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x)) \leq d(f,g) + d(g,h)$$

wobei für die letzte Ungleichung die Eigenschaft des Supremums als obere Schranke benutzt wurde. Benutzt man nun noch dass $d(f,h)$ als Supremum die kleinste obere Schranke aller Werte $d_Y(f(x), h(x))$ ist, so ergibt sich $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$. $\leftarrow$

Nehmen wir nun an, dass $(\mathcal{F}_b(X,Y), d)$ vollständig ist. Ist (y_n) eine Cauchy Folge in Y dann wird durch $f_n : x \mapsto y_n$ eine Cauchy Folge (f_n) aus konstanten Funktionen in $\mathcal{F}_b(X,Y)$ definiert.

$\rightarrow$ Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq N$ stets $d_Y(y_n, y_m) < \epsilon/2$ gilt (Definition der Cauchy Folge mit der kleinen Modifikation $\epsilon/2$ statt ϵ). Folglich gilt auch $d_Y(f_n(x), f_m(x)) = d_Y(y_n, y_m) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ für alle $x \in X$, d.h. $d(f_n, f_m) < \epsilon$ falls $n, m \geq N$. Also ist (f_n) eine Cauchy Folge.$\leftarrow$

Sei f der Grenzwert dieser Folge. Als Grenzwert konstanter Funktionen ist f auch konstant, d.h. $f(x) = y$ für alle $x \in X$.

$\rightarrow$ Da in vollständigen Räumen Cauchyfolgen konvergieren, existiert der Grenzwert $f \in \mathcal{F}_b(X,Y)$. Seien $x_1, x_2 \in X$. Dann gilt

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), y_n) + d_Y(y_n, f(x_2)) = d_Y(f(x_1), f_n(x_1)) + d_Y(f_n(x_2), f(x_2))$$

Zu $\epsilon > 0$ existiert nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(f, f_n) < \epsilon/2$ falls $n \geq N$. Da die rechte Seite der obigen Abschätzung durch $2d(f, f_n)$ dominiert wird, folgt bei der Wahl $n \geq N$, dass $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$. Mit der Aussage des Mega-Blatts 15 erhalten wir $f(x_1) = f(x_2)$ und da x_1, x_2 beliebige Punkte in X waren, sehen wir, dass der Grenzwert f konstant ist. $\leftarrow$

Es gilt also für beliebiges $x \in X$, dass $y_n = f_n(x) \rightarrow f(x) = y$, d.h. die Folge (y_n) konvergiert in Y und somit ist (Y, d_Y) vollständig.

$\rightarrow$ Wir erhalten für $\epsilon > 0$ mit $n \geq N$ wie oben bei beliebigem $x \in X$

$$d_Y(y_n, y) = d_Y(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n, f) < \epsilon/2 < \epsilon$$

d.h. (y_n) konvergiert in Y. Da also jede Cauchy Folge in Y konvergiert ist (Y, d_Y) definitionsgemäß vollständig. $\leftarrow$

Ist umgekehrt (f_n) eine Cauchy Folge in $\mathcal{F}_b(X,Y)$, dann ist für jedes $x \in X$ die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))$ eine Cauchy Folge in Y und hat damit einen Grenzwert.

$\rightarrow$ Dies folgt mit der schon mehrfach benutzten Abschätzung $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m)$ (Supremum ist obere Schranke). Ist $\epsilon > 0$, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass mit $n, m \geq N$ folgt $d(f_n, f_m) < \epsilon$. Die Abschätzung zeigt also, dass $(f_n(x))$ eine Cauchy Folge in Y ist. $\leftarrow$

Wir definieren $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und man zeigt leicht, dass f_n bezüglich der Metrik d gegen die Funktion f konvergiert. Damit ist $\mathcal{F}_b(X,Y)$ vollständig.

$\rightarrow$ Zunächst ist zu zeigen, dass die Grenzfunktion in $\mathcal{F}_b(X,Y)$ enthalten ist. Da f jedem $x \in X$ einen Wert in Y zuordnet genügt es, die Beschränktheit zu zeigen. Dies folgt aus dem allgemeinen Satz, dass jede Cauchy Folge in einem metrischen Raum beschränkt ist - hier eine kurze Beweisskizze: Zu $\epsilon = 1$ existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ so dass $d(f_n, f_m) < 1$ für $n, m \geq N_1$. Wählt man $R = \max\{d(f_1, f_{N_1}), \ldots, d(f_{N_1-1}, f_{N_1}), 1\}$ so ist $f_k \in B_R(f_{N_1})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da $f_{N_1} \in \mathcal{F}_b(X,Y)$ gibt es $\bar{y} \in Y$ und $r > 0$, so dass $f_{N_1}(X) \subset B_r(\bar{y})$. Ist nun $x \in X$ gegeben, dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $d_Y(f(x), f_n(x)) < \epsilon$ falls $n \geq M$. In diesem Fall gilt also $d_Y(f(x), \bar{y}) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_{N_1}(x)) + d_Y(f_{N_1}(x), \bar{y}) \leq 1 + R + r$. Also ist f beschränkt. Sei nun $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(f_n, f_m) < \epsilon/2$ falls $n, m \geq N$. Aus der Definition von f folgt dass zu jedem $x \in X$ ein $N_x \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d_Y(f(x), f_m(x)) < \epsilon/2$ falls $m \geq N_x$. Wählen wir $m \geq \max\{N, N_x\}$ und $n \geq N$, so folgt

$$d_Y(f(x), f_n(x)) \leq d_Y(f(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Damit gilt $d(f, f_n) < \epsilon$ für $n \geq N$, d.h. die Cauchy Folge (f_n) konvergiert in $\mathcal{F}_b$. $\leftarrow$ $\blacksquare$