Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 17

Aufgabe 1: Srgfltfzrng

Ein unsorgfältiger Beweis ist wie ein Text ohne Vokale: man kann den Sinn zwar so ungefähr nachvollziehen, br rchtg vrstndlch wrd s rst, wnn d Vkl dzgschrbn wrdn. (das war der Satz: aber richtig verständlich wird es erst, wenn die Vokale dazugeschrieben werden.) Inzwischen kennen Sie den Spruch schon auswendig: in einem sorgfältigen Beweis wird *jede* noch so unscheinbare Teilaussage auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung zurückgeführt (alle anderen Begründungsversuche (d.h. Beweise durch Überreden) sind *verboten*).

Üben Sie das Sorgfaltifizieren von Aussage und Beweis an folgendem Beispiel. Zuerst aber die benötigten Definitionen, um die Aussage zu verstehen.

Definition 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt* offen*, wenn für jeden Punkt $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Eine Menge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen*, falls A^c offen ist. Die Menge ∂A enthält alle Punkte $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass alle offenen Mengen U die x enthalten einen nichtleeren Schnitt mit A und A^c haben. Schließlich heißt X zusammenhängend, falls $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgschlossen sind.*

Satz 1. *Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und A eine echte Teilmenge von X. Dann gilt $\partial A \neq \emptyset$.*

Beweis: Angenommen $\partial A = \emptyset$. Dann ist A abgeschlossen. Außerdem ist wegen $\partial A = \partial A^c$ das Komplement A^c auch abgeschlossen. Damit ist A offen im Widerspruch zur Voraussetzung, dass X zusammenhängend ist. Also gilt $\partial A \neq \emptyset$. ∎

1. Die Beweisstrategie ist indirekt. Wir nehmen also das Gegenteil der Behauptung an und zeigen dann, dass dies zu einer falschen Aussage führt. Sei also $\partial A = \emptyset$. Um zu zeigen, dass dann A abgeschlossen ist, benutzen wir erneut einen Widerspruchsbeweis. Sei also A nicht abgeschlossen, d.h. per Definition ist A^c nicht offen. Es gibt also $x \in A^c$ so dass $B_\epsilon(x) \not\subset A^c$ für alle $\epsilon > 0$ (das ist die Verneinung der Offenheit also der Existenz eines $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset A^c$). Sei nun U eine offene Menge, die x enthält. Dann gibt es (Definition) ein $r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U$. Die obige Beobachtung impliziert $B_r(x) \not\subset A^c$, d.h. es gibt $y \in B_r(x) \subset U$ mit $y \in A$. Also gilt $x \in U \cap A^c$ und $y \in U \cap A$. Damit ist $U \cap A^c \neq \emptyset$ und $U \cap A \neq \emptyset$ und nach Definition ist $x \in \partial A$. Das ist ein Widerspruch zu $\partial A = \emptyset$ und folglich ist A abgeschlossen.

2. Wir zeigen dass für jede Menge B die Aussage $\partial B \subset \partial B^c$ wahr ist. Durch Anwendung dieses Ergebnisses auf $B = A$ und $B = A^c$ folgen mit $(A^c)^c = A$ die beiden Inklusionen $\partial A \subset \partial A^c$ und $\partial A^c \subset \partial A$, also die Gleichheit der beiden Ränder. Sei also $x \in \partial B$. Dann gilt für jede offene Menge U mit $x \in U$ dass $U \cap B \neq \emptyset$ und $U \cap B^c \neq \emptyset$. Damit gilt aber auch $U \cap B^c \neq \emptyset$ und $(U^c)^c \cap B \neq \emptyset$, für jedes offene U mit $x \in U$. Folglich ist $x \in \partial B^c$ und somit $\partial B \subset \partial B^c$.

3. Da $\partial A^c = \partial A = \emptyset$ folgt wie in (1), dass A^c abgeschlossen ist. Damit ist A auch offen. Wäre nun garantiert, dass $A \neq \emptyset$, so hätten wir tatsächlich einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass X zusammenhängend ist. Dies ist aber der aktuellen Form des Satzes nicht zu entnehmen! Wir müssen die Behauptung deshalb leicht abändern, um den Fall $A = \emptyset$ auszuschließen. Nur so ist unser Widerspruchsbeweis führbar.

Satz 2. *Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und $A \neq \emptyset$ eine echte Teilmenge von X. Dann gilt $\partial A \neq \emptyset$.*

Nachdem Sie Satz und Beweis sorfaltifiziert haben, denken Sie darüber nach. ob die Aussage die anschauliche Vorstellung präzisiert, dass beschränkte Mengen in normierten Räumen Ränder haben?

Bemerkung: Formulieren Sie eine entsprechende Behauptung und beweisen Sie sie sorgfältig. Denken Sie daran, dass zur Anwendung eines Satzes alle Voraussetzungen *sorgfältig* zu prüfen sind. Außerdem sind beim Präzisieren anschaulicher Vorstellungen oft Zusatzvoraussetzungen erforderlich, da die Normalbürger-Vorstellung nicht alle Sonderfälle umfasst.

Satz 3. *Sei $X \neq \{0\}$ ein normierter Raum und $A \neq \emptyset$ eine beschränkte Teilmenge von X. Dann gilt $\partial A \neq \emptyset$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass eine beschränkte Teilmenge eines (nicht-trivialen) normierten Vektorraums eine echte Teilmenge ist. Zunächst impliziert die Beschränktheit von A, dass ein $x \in X$ und ein $r > 0$ existiert mit $A \subset B_r(x)$. Wählen wir ein $y \in X$ mit $y \neq 0$ (das geht nur, wenn X nicht der Nullraum ist), so können wir den Richtungsvektor $\xi = y/\|y\|$ bilden. Nun hat $z = x + 2r\xi$ den Abstand $2r > r$ von x, denn $\|z - x\| = \|2r\xi\| = 2r$ und somit ist z nicht in $B_r(x)$ enthalten. Die Annahme $z \in A$ führt also zum Widerspruch, da jedes Element in A auch in $B_r(x)$ ist (Definition von $\subset$). Also ist $z \in A^c$ und damit $A^c \neq \emptyset$ so dass A eine echte Teilmenge von X ist.
Im zweiten Schritt ist nachzuweisen, dass ein normierter Raum automatisch zusammenhängend ist. Dies zeigt man durch Widerspruch. Angenommen X sei nicht zusammenhÃ?ngend. Dann gibt es eine Teilmenge $B \neq \emptyset$ und $B \neq X$, die offen und abgeschlossen ist (Konsequenz der Definition). Wir wählen $x \in B$ und $y \in B^c$ (das ist möglich wegen $B \neq \emptyset$ und $B^c \neq \emptyset$, wobei letztere Aussage aus $B \neq X$ folgt). Die beiden Punkte lassen sich durch eine stetige Kurve verbinden. Wir setzen $\gamma(t) = x + t(y - x)$ für $t \in [0, 1]$. Dies ist eine (sogar Lipschitz-) stetige Funktion von $[0, 1]$ nach X, denn

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|x + t(y - x) - x - s(y - x)\| = \|y - x\| \; |t - s|$$

Damit ist $A = \gamma^{-1}(B)$ eine offen und abgeschlossene Teilmenge von $[0, 1]$ (Urbilder offener bzw. abgeschlossener Mengen sind offen bzw. abgeschlossen). Da $[0, 1]$ aber zusammenhängend ist, muss $A = [0, 1]$ oder $A = \emptyset$ gelten. Wegen $\gamma(0) = x \in B$ ist aber $0 \in A$ und somit $A \neq \emptyset$. Andererseits ist $\gamma(1) = y \in B^c$ so dass $1 \notin A$ und damit $A \neq [0, 1]$. Das ist ein Widerspruch und wir müssen die Annahme, dass X nicht zusammenhängend ist fallen lassen. (Bem: Diesen Beweis können Sie fast 1:1 übernehmen, um zu zeigen, dass ein wegzusammenhängender Raum automatisch zusammenhängend ist.)
Der oben bewiesene Satz läßt sich also auf die spezielle Situation anwenden und zeigt damit die Behauptung.