Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 18

Aufgabe 1: Sie wissen schon ...

Es ist schön, wenn Sie Teilaussagen in einem Beweis intuitiv verstehen. Aber fragen Sie sich auch in einem solchen Fall, wie die Aussage auf ein Axiom, einen Satz, eine Definition, oder eine Voraussetzung zurückgeführt werden kann. Wenn Sie sich daran gewöhnt haben, *immer* nach diesem Muster vorzugehen, dann stört Sie irgendwann auch nicht mehr, dass Sie eine Aussage nicht auf Anhieb intuitiv verstehen. Sie wissen dann ja, was zu tun ist: irgendwie (und hier ist Ihre Kreativität einzusetzen) muss die Aussage auf Axiome, Sätze, Definitionen, oder Voraussetzungen zurückgeführt werden.

Üben Sie das Sorgfaltifizieren an folgendem Beispiel. Es geht dabei um die Menge der reellen, quadratsummierbaren Folgen

$$l_2 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

mit den wie üblich termweise definierten Rechenoperationen $(a+b)_n = a_n + b_n$ und $(\lambda a)_n = \lambda a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei für $a \in l_2$

$$\|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Satz 1. $(l_2, \|\cdot\|_2)$ *ist ein normierter Vektorraum, in dem die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt ist.*

Beweis: Die Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Normeigenschaften der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^N$ und der Grenzwerteigenschaft

$$\|a\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|a\|_{2,N}, \qquad \|a\|_{2,N} = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Folgen $e^{(i)}$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$ definiert durch

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

haben jeweils Norm 1 und gegenseitigen Abstand $\sqrt{2}$. Deshalb lässt sich aus der Überdeckung der abgeschlossenen Einheitskugel mit den Kugeln $B_{\frac{1}{2}}(x)$, $x \in \overline{B_1(0)}$ keine endliche Überdeckung auswählen. ∎

1. Haben Sie gemerkt, dass in der Aussage des Satzes die Teilaussage versteckt ist, dass l_2 ein Vektorraum ist und dass dieser Aspekt im Kurzbeweis gar nicht angesprochen wurde? Tatsächlich zeigt man die Vektorraumeigenschaft dadurch, dass man die Unterraumeigenschaft im Vektorraum aller reellen Folgen nachweist. Für $a, b \in l_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also zu zeigen, dass sowohl λa als auch $a + b$ in l_2 enthalten sind. Aufgrund der Definition von l_2 ist dies gelungen, wenn gezeigt wurde, dass $\|\lambda a\|_2 < \infty$ und $\|a + b\|_2 < \infty$ gilt. Beide Teilaussagen fallen aber beim Nachweis der Normeigenschaften als Nebenprodukt ab, so dass wir uns sofort diesem Punkt zuwenden können.

2. Zunächst nehmen wir an, $a \in l_2$ mit $a \neq 0$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$ (Definition der Null im Vektorraum aller Folgen). Folglich ist auch
$$\|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{a_m^2} = |a_m| > 0.$$
Die Negation dieser Implikation liefert die erste Normeigenschaft $\|a\|_2 = 0 \Rightarrow a = 0$. Sind $a, b \in l_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt mit den Normeigenschaften der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^N$
$$\|\lambda a\|_{2,N} = |\lambda| \, \|a\|_{2,N}, \qquad \|a+b\|_{2,N} \leq \|a\|_{2,N} + \|b\|_{2,N}. \tag{1}$$
Mit diesen Relationen werden wir die übrigen Normeigenschaften nachweisen unter Zuhilfenahme des folgenden Hilfssatzes.

Satz 2. *Eine Folge a ist ein Element von l_2 genau dann, wenn die Folge $(\|a\|_{2,N})_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent ist was wiederum genau dann der Fall ist, wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\|a\|_{2,N} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $\|a\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|a\|_{2,N}$ bzw. $\|a\| \leq C$ sowie $\|a\|_{2,N} \leq \|a\|_2$.*

Der Beweis geht folgendermaßen: $a \in l_2$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=1}^{N} a_n^2)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Wegen der Stetigkeit der Wurzel- und Quadratfunktion ist dies äquivalent zur Konvergenz von $(\|a\|_{2,N})_{N\in\mathbb{N}}$. Außerdem gilt
$$\lim_{N\to\infty} \|a\|_{2,N} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} = \|a\|_2$$
Weiter sind konvergente Folgen beschränkt und beschränkte monotone Folgen konvergent. Daraus folgt die zweite Äquivalenz der Behauptung sowie auch die Aussagen $\|a\| \leq C$ sowie $\|a\|_{2,N} \leq \|a\|_2$.
Aus (1) folgt mit Grenzwertsatz die Konvergenz von $\|\lambda a\|_{2,N}$ und zusammen mit dem Hilfssatz
$$\|\lambda a\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|\lambda a\|_{2,N} = \lim_{N\to\infty} |\lambda| \, \|a\|_{2,N} = |\lambda| \lim_{N\to\infty} \|a\|_{2,N} = |\lambda| \, \|a\|_2$$
Entsprechend folgt durch mehrfache Anwendung des Hilfssatzes aus (1)
$$\|a+b\|_{2,N} \leq \|a\|_{2,N} + \|b\|_{2,N} \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$$
und damit $a + b \in l_2$ mit $\|a+b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2$.

3. Die Eigenschaften $\|e^{(i)}\|_2 = 1$ und $\|e^{(i)} - e^{(j)}\|_2 = \sqrt{2}$ für $i \neq j$ rechnet man leicht nach. (Können Sie diesen Teil selbst genauer ausführen?)

4. Angenommen $\mathcal{U} = \{B_{\frac{1}{2}}(x) | x \in \overline{B_1(0)}\}$ enthält eine endliche Überdeckung, d.h. $\overline{B_1(0)} \subset B_{\frac{1}{2}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{1}{2}}(x_m)$. Dann muss mindestens eine Kugel $B_{\frac{1}{2}}(x_k)$ zwei verschiedene Vektoren $e^{(i)}$ und $e^{(j)}$ enthalten (warum? Versuchen Sie mal einen Widerspruchsbeweis!). Dann folgt aber
$$\|e^{(i)} - e^{(j)}\|_2 \leq \|e^{(i)} - x_k\|_2 + \|x_k - e^{(j)}\|_2 \leq 2\frac{1}{2} = 1 < \sqrt{2}$$
im Widerspruch zu $\|e^{(i)} - e^{(j)}\|_2 = \sqrt{2}$. Wir müssen also die Annahme der Existenz einer endlichen Überdeckung in $\mathcal{U}$ fallen lassen, so dass die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt ist.