Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
H. Kungl
J. Simons

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 19

Aufgabe 1: Per Definition: sorgfältig

Diesmal geht es um sorgfältiges Anwenden von Definitionen. Zum Aufwärmen sei an die Konvergenzdefinition erinnert:

Definition 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge konvergiert gegen $x \in X$ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.*

Zeigen Sie durch sorgfältige Anwendung der Definition folgenden Satz.

Satz 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Weiter seien $\alpha, \gamma > 0$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $x \in X$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit $d(x_n, x) < \gamma\epsilon$ für alle $n \geq \alpha N$.*

Damit Sie wissen, was ich meine, hier die erste Hälfte des Beweises als Beispiel:

Beweishälfte: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\epsilon > 0$. Dann ist auch $\tilde{\epsilon} = \gamma\epsilon > 0$ und nach Definition existiert $x \in X$ und $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \tilde{\epsilon}$ falls $n \geq \tilde{N}$. Im Fall $\alpha \geq 1$ wählt man $N = \tilde{N}$. Falls $\alpha < 1$ wählt man N z.B. als die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\tilde{N}/\alpha$ ist. In jedem Fall gilt dann $\alpha N \geq \tilde{N}$ und somit $d(x_n, x) < \gamma\epsilon$ falls $n \geq \alpha N$.

Die andere Richtung können Sie jetzt sicher selbst machen ...

zweite Beweishälfte: Für die umgekehrte Richtung sei $\epsilon > 0$. Dann ist $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\gamma > 0$ und es existiert $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \gamma\tilde{\epsilon}$ falls $n \geq \alpha\tilde{N}$. Setzt man N als kleinste natürliche Zahl, die größer als $\alpha\tilde{N}$ ist, so erhalten wir $d(x_n, x) < \epsilon$ falls $n \geq N$ und damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Definition konvergent ■

... und anschließend den folgenden Satz nach dem gleichen Sorgfältigkeitsmuster beweisen. Auch hier nochmal zur Erinnerung die Definition.

Definition 2. *Seien X, Y endlichdimensionale normierte Räume, $\emptyset \neq U \subset X$ offen, $x \in U$ und $U_x = \{h \in X | x + h \in U\}$. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt differenzierbar in x, falls eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ existiert und eine Funktion $r(x, \cdot) : U_x \to Y$, die in $0 \in U_x$ stetig ist und dort den Wert 0 annimmt, so dass*

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\| r(x, h), \qquad h \in U_x.$$

Satz 2. *Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x \in U$ differenzierbar, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U$ so dass $f|_{B_\epsilon(x)}$ in x differenzierbar ist.*

Beweis: Sei zunächst f differenzierbar in x (hier ist die Definition mit $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ zu benutzen wobei der Satz an dieser Stelle etwas unpräzise formuliert ist, da von einer offenen Menge gesprochen wird, ohne die Metrik genau zu erklären. Da Differenzierbarkeit aber nur in normierten Räume definiert ist und in $\mathbb{R}^n$ alle Norm-basierten Metriken äquivalent sind, ist dies verzeihlich - man kann jede beliebige Norm nehmen). Da U nach Voraussetzung offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Folglich ist $B_\epsilon(0) \subset U_x$, da für $h \in B_\epsilon(0)$ gilt, dass $x + h \in B_\epsilon(x) \subset U$. Die Differenzierbarkeit in x liefert uns nun eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sowie eine Funktion $r(x, \cdot) : U_x \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{h\to 0} r(x, h) = r(x, 0) = 0$ und

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\| r(x, h), \qquad h \in U_x.$$

Setzt man $V = B_\epsilon(x)$ (insbesondere ist $V \neq \emptyset$ offen) sowie $g = f|_V$, so gilt zunächst

$$V_x = \{h \in \mathbb{R}^n \,|\, x + h \in V\} = B_\epsilon(0) \subset U_x$$

(sind Ihnen diese Inklusionen klar, d.h. können Sie sie sorgfältig beweisen?). Außerdem gilt für $R(x, \cdot) = r(x, \cdot)|_{V_x}$, dass $\lim_{h\to 0} R(x, h) = \lim_{h\to 0} r(x, h) = r(x, 0) = R(x, 0) = 0$ und

$$g(x + h) = f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\|r(x, h) = g(x) + Ah + \|h\|R(x, h), \qquad h \in V_x.$$

Nach Definition ist g damit differenzierbar in x.
Für die umgekehrte Richtung liefert uns die Definition der Differenzierbarkeit von $f|_V$ in $x \in B_\epsilon(x) = V \subset U$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sowie eine Funktion $\tilde{r}(x, \cdot) : V_x \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{h\to 0} \tilde{r}(x, h) = \tilde{r}(x, 0) = 0$ und

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\|\tilde{r}(x, h), \qquad h \in V_x.$$

Um die Differenzierbarkeit von f in x zu beweisen, definieren wir

$$r(x, h) = \begin{cases} (f(x + h) - f(x) - Ah)/\|h\| & h \in U_x \backslash V_x \\ \tilde{r}(x, h) & h \in V_x \end{cases}$$

Hierzu noch ein paar Kommentare: da nach Voraussetzung $V = B_\epsilon(x) \subset U$ ist, gilt auch $V_x = B_\epsilon(0) \subset U_x$ (nochmal ... alle Inklusionen oder sonstige Aussagen können sorgfältig bewiesen werden - erlauben Sie mir aber hier etwas "größere" Schritte zu machen. Das soll *Sie* aber nicht davon abhalten, an allen Stellen den Bleistift zu zücken und genauer zu argumentieren. Ich will den Schwerpunkt diesmal auf die sorgfältige Definitionsanwendung legen, also auf die penible Abarbeitung aller Definitionskriterien, d.h. hier den Existenznachweis einer passenden Rest-Funktion sowie einer linearen Abbildung). Damit ist in $U_x \backslash V_x$ die Division durch $\|h\|$ unproblematisch, da dort $\|h\| \geq \epsilon > 0$. Insgesamt haben wir also eine Funktion $r(x, \cdot) : U_x \to \mathbb{R}^m$ definiert, die für alle $h \in U_x$ die Bedingung

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \|h\|r(x, h)$$

erfüllt. Außerdem existiert wegen der Stetigkeit von $\tilde{r}(x, \cdot)$ zu jedem $\eta > 0$ ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass $\|\tilde{r}(x, h)\| < \eta$ falls $h \in V_x$ und $\|h\| < \tilde{\delta}$. Wählen wir insbesondere $\delta = \min\{\epsilon, \tilde{\delta}\}$, so gilt $\|r(x, h)\| = \|\tilde{r}(x, h)\| < \eta$ halls $h \in U_x$ und $\|h\| < \delta$. Also ist $r(x, \cdot)$ in 0 stetig und f damit differenzierbar in x. ∎