Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 1

Hinweise:

- Diskutieren Sie die Aufgaben und einigen Sie sich auf eine Antwort.
- Schreiben Sie Ihr Resultat auf (1x pro Gruppe) evtl. mit Fragen, Kommentaren und geben Sie Ihre Namen an.
- Wenn Sie Themenwünsche oder Verbesserungsvorschläge haben, bitte ebenfalls notieren.

Aufgabe 1: Mathematische Sprachübung

a) Definieren Sie Elementaraussagen und schreiben Sie den Satz mit Hilfe der üblichen Aussageverknüpfungen der Logik.

Wenn es regnet geht Klaus Regenwürmer suchen, aber er geht nicht ohne Gabi.

b) Ordnen Sie jedem der umgangssprachlichen Sätze (i)-(iv) die entsprechende logische Formel aus der Liste (a)-(f) zu. Die Menge A enthalte alle Lebewesen, $F(x)$ sei die Aussageform „x ist ein Mensch“ und $G(x,y)$ sei die Aussageform „x liebt y“.

i) Jeder Mensch liebt einen Menschen.

ii) Ein Mensch liebt einen Menschen.

iii) Ein Mensch liebt alle Menschen.

iv) Alle Menschen lieben alle Menschen.

a) $\exists x \in A : F(x) \wedge \forall y \in A : F(y) \Rightarrow G(x,y)$
(Leseprobe: *Es existiert ein Wesen x, so dass x ein Mensch ist und für alle Wesen y gilt, wenn y ein Mensch ist, dann lieben sich x und y.* Diese Aussage ist wahr, wenn es einen Menschen gibt, der alle anderen liebt, d.h. die Aussage entspicht (iii).)

b) $\forall x \in A : F(x) \wedge \forall y \in A : F(y) \Rightarrow G(x,y)$

c) $\exists y \in A : F(y) \wedge \exists x \in A : F(x) \wedge G(x,y)$

d) $\forall y \in A : F(y) \Rightarrow \forall x \in A : F(x) \Rightarrow G(x,y)$

e) $\exists x \in A : F(x) \Rightarrow \exists y \in A : F(y) \wedge G(x,y)$

f) $\forall x \in A : F(x) \Rightarrow \exists y \in A : F(y) \wedge G(x,y)$

Aufgabe 2: Mengenschreibweise üben

Beschreiben Sie den Inhalt folgender Mengen in der Alltagssprache:

a) $C := \{c \in \mathbb{R} | \exists a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Q} : c = a + b\}$

b) $D := \{d \in \mathbb{R} | \exists a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : -a = d\}$

c) $E := \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$

Formulieren Sie folgende Mengen in der üblichen Mengenschreibweise.

a) Menge aller ungeraden Zahlen.

b) Menge aller Potenzen von natürlichen Zahlen.

c) Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, die die Zahl 1 enthalten.

Aufgabe 3: Zu Formeln immer Beispiele anschauen

Konkretisieren Sie die abstrakten Formeln durch sinnvolle Wahl verschiedener $m \in \mathbb{N}$, z.B. $\sum_{k=2}^{m} 1$ mit $m = 4$ ergibt $\sum_{k=2}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 = 3$. Mit $m = 1$ ergibt sich $\sum_{k=2}^{1} 1 = 0$.

a) $\sum_{k=3}^{m} \frac{1}{k}$

b) $\prod_{k=5}^{m} \frac{k+1}{k}$

c) $M_m = \{n \in \mathbb{N} | m + n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 4: Wie nähert man sich einer Übungsaufgabe

Folgende Aufgabe könnte auf einem Übungsblatt erscheinen. Wie gehen Sie an so eine Aufgabe heran? Eine gute Methode ist: (1) Beispiele anschauen; (2) nach dem Muster suchen, warum die Aussage immer wahr ist; (3) das Muster ausnutzen, um den Beweis zu führen.
Bearbeiten Sie hier zunächst (1) und (2). Wenn Sie eine gute Idee haben, können Sie auch (3) versuchen.
Seien $0 < a_1 < ... < a_n$ natürliche Zahlen. Dann ist

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x^{a_i} - x^{a_j}}{x^i - x^j} \qquad \text{für } x \in (0, 1)$$

ein Polynom, d.h. von der Form $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_m x^m$. Hinweis: Das Produkt wird über alle Indexpaare (i, j) gebildet, die der Bedingung $1 \leq i < j \leq n$ genügen.