Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

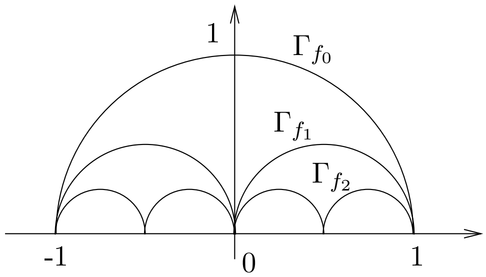
Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1: Erweitern Sie Ihren Beispielkatalog

Kennen Sie Funktionen die stetig und *nicht* gleichmäßig stetig sind? Geben Sie vier verschiedene Beispiele $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ auf den Definitionsmengen $D_1 = (0,1)$, $D_2 = (0,2)$, $D_3 = [3,\infty)$, $D_4 = [4,\infty)$ an, wobei f_2 und f_4 zusätzlich beschränkt sein sollen. Finden Sie auch ein Beispiel auf $D_5 = [5,6]$?

Aufgabe 2: Die Kreiszahl π einmal anders ...

Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Der Graph Γ_{f_n} von f_n sei dabei die Vereinigung von 2^n Halbkreisen mit Radien 2^{-n} (siehe Skizze).



1. Geben Sie eine Funktionsvorschrift für f_n an. Hinweis: am einfachsten definiert man f_n stückweise auf geeigneten Teilintervallen von [-1,1] mit Hilfe von skalierten und verschobenen Versionen von $f_0(x) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig. Wie lautet der Grenzwert f?
3. Zeigen Sie dass die Länge L_n der Graphen Γ_{f_n} konvergiert. Wie lautet der Grenzwert?
4. Da die Funktionsgraphen Γ_{f_n} *gleichmäßig* gegen den Graphen Γ_f konvergieren, konvergiert auch deren Länge gegen die Länge des Grenzgraphen Γ_f. Ermitteln Sie diese Länge und bestimmen Sie damit die Kreiszahl π.

Aufgabe 3: Sauberes Argumentieren

Untersuchen Sie welches Monotonieverhalten die Verkettung $h = g \circ f$ einer streng monoton fallenden Funktion f mit einer monoton fallenden Funktion g hat.

1. Überlegen Sie, wie sich h verhält (Schmierzettel).
2. Formulieren Sie eine Behauptung über das Verhalten von h mit geeigneten Vorraussetzungen an f und g.
3. Schreiben Sie die Definitionen für die in Behauptung und Voraussetzung auftretenden Monotonieverhalten auf.
4. Beweisen Sie Ihre Behauptung durch sorgfältigen Nachweis und Ausnutzung der Definitionsbedingungen.