Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1: Bringen Sie (sich) in Form

Ein wichtiger Bestandteil der Mathematik ist es, wiederholt auftretende Muster und Konzepte als solche zu erkennen und, nach einem Abstraktionsprozess, ihre Essenz knapp und präzise zu beschreiben. Dies geschieht mit Symbolen in Definitionen (Beispiel: das Summensymbol). Umgekehrt ist die Anwendung von allgemeinen Ergebnissen (Sätzen) in konkreten Situationen nur dann möglich, wenn eine *Übersetzung* in geeignete abstrakte Konzepte möglich ist (Beispiel: die geometrische Summenformel). Bei diesen Übersetzungen ist es hilfreich, Namen zu vergeben, die den Zusammenhang zwischen konkreter Variante und abstrakter Form herstellen. Ist also das allgemeine Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

und kommt in einer konkreten Situation der Ausdruck $\sum_{m=n}^{k}(1-\frac{q}{x})^m$ vor, so stellt man den Zusammenhang durch geeignete Abkürzungen her. Die Summationsvariable ersetzt man z.B. durch $i = m - n$, so dass die untere Summationsgrenze wie gewünscht 0 und die obere $N = k - n$ ist. Weiter definiert man $a = 1 - q/x$ und erhält

$$\sum_{m=n}^{k} \left(1-\frac{q}{x}\right)^m = \sum_{i=0}^{N} a^{i+n} = a^n \sum_{i=0}^{N} a^i$$

Nun ist die geometrische Summenformel verwendbar, falls $a \neq 1$ also $q/x \neq 0$

$$a^n \sum_{i=0}^{N} a^i = a^n \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

Am Ende vernichtet man die eingeführten Namen wieder, indem man rücksubstituiert

$$\sum_{m=n}^{k} \left(1-\frac{q}{x}\right)^m = \frac{x}{q}\left(\left(1-\frac{q}{x}\right)^n - \left(1-\frac{q}{x}\right)^{k+1}\right).$$

Den Übersetzungsprozess *müssen* Sie beherrschen. Beachten Sie, dass die Erzeugung der gleichen *Form* nicht bedeutet, dass die Variablen identisch sein müssen, d.h. statt q kann a, b etc. stehen und statt k und n können i und N auftreten usw. Wichtig ist nur, dass die Struktur die gleiche ist. Hier ist die Übung dazu (die Aufgaben können Sie sich auch selbst basteln!)

1. Bringen Sie die Ausdrücke durch geeignete Abkürzungen auf Standardform $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
   (a) $\sum_{k=4}^{\infty} k a_k x^{k-1}$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ – berechnen Sie die Ableitung *nach* der Transformation in Standardform und machen Sie ihre Abkürzungen anschließend rückgängig.
   (c) $\sum_{x=1}^{\infty} x^n a^x$
2. Nach dem Aussonderungsprinzip können Teilmengen einer Menge M gebildet werden, die aus allen Elementen $x \in M$ bestehen, für die eine bestimmte Aussage $A(x)$ wahr ist. Die Schreibweise für diese Menge ist $\{x \in M | A(x)\}$. Geben Sie in den folgenden Fällen jeweils M und A an.
   (a) $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
   (b) $\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$
   (c) Die Menge der differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
3. Aussagen mit Quantoren haben die Standardform $\exists x \in M : A(x)$ bzw. $\forall x \in M : A(x)$, wobei M eine Menge und A eine Aussageform ist. Schreiben Sie folgende Aussagen um, so dass *alle* beteiligten Quantorenausdrücke in dieser Standardform auftreten.

(a) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x > y$

(b) $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

4. Bei der Überprüfung von Stetigkeit oder Differenzierbarkeit können die Sätze über Vielfache, Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen angewendet werden, wenn die konkrete Funktion als Mischung aus Vielfachen, Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen geschrieben werden kann. Dazu muss man die Verknüpfungsstruktur genau erkennen und das macht man wieder durch das Einführen neuer Funktionsnamen. So ist etwa $f(x) = 4\sin(x - \cos(x))$ von der Form $f = \lambda F$ mit $F = \sin \circ g$, $g = h + k$ und $h(x) = x$, $k = (-1)\cos$. Zerlegen Sie folgende Ausdrücke in elementare Verknüpfungen.

   (a) $(5\exp(x) + x^2)/(\exp(3x) + x^4)$

   (b) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(3x + \exp(y))$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

5. Um Definitionen anwenden zu können, muss ein konkreter Ausdruck normalerweise durch Umbenennung in die passende Form gebracht werden. So kann z.B. das Label "konvergent" nur dann vergeben werden, wenn die Situation durch Einführung sinnvoller Namen mit der Form der Definition
$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$
zur Deckung gebracht werden kann. Statt ϵ, N, n, a_n, a können natürlich andere Buchstaben benutzt werden. Wichtig ist nur, dass die Form exakt gleich ist.

   (a) Bei gegebenem $\epsilon > 0$ gelte $|a_n + 1/n - a + 4| < 5\epsilon$ falls $n > 2/\epsilon$. Konvergiert hier was? Führen Sie geeignete Abkürzungen ein, um die Definition anwenden zu können.

6. Auch beim Anwenden von Sätzen muss erst durch Einführung von geigneten Abkürzungen die spezielle Form in die allgemeine des Satzes überführt werden. Übrigens: je mehr Erfahrung Sie haben, desto schneller sehen Sie diese Übersetzung und schließlich geht das automatisch. Nur wenn es sehr verwirrend wird, muss man durch gute Abkürzungen wieder Klarheit schaffen. Als Beispiel wenden Sie bitte den Mittelwertsatz: *Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ so dass $(f(b) - f(a)/(b - a) = f'(\xi)$.* in der folgenden Situation an.

   (a) Sei $f : (a, b) \to (0, \infty)$ differenzierbar und seien $x, y \in (a, b)$. Was können Sie zum Ausdruck $1/f(x) - 1/f(y)$ sagen? Führen Sie geeignete Abkürzungen ein (was entspricht a, b im Mittelwertsatz, was entspricht f im Mittelwertsatz etc.).

7. Zum Schluss noch ein kleines Spiel mit Funktionen. Eine Funktion wird dadurch definiert, dass man die Definitionsmenge D, die Wertemenge E und eine eindeutige Zuordnungsvorschrift angibt, so dass *jedem* Element von D ein Element von E zugeordnet wird. Die folgenden Ausdrücke beinhalten eine Zuordnungsvorschrift, allerdings fehlen die Angaben über Definitions- und Wertebereich. Wählen Sie sinnvolle Mengen D, E und einen Funktionsnamen F, so dass $F : D \to E$ mit der angegebenen Vorschrift tatsächlich eine Funktion beschreibt.

   (a) $u \mapsto u'$

   (b) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Die Vorschrift sei $u \mapsto u'(t)$.

   (c) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Die Vorschrift sei $u(t) \mapsto u'$.

   (d) $u' \mapsto u$

   (e) $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$

   (f) $f \mapsto \big(x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt\big)$