



Mathematik einüben in Gruppenarbeit Aufgabenblatt 2

Hinweise:

- Diskutieren Sie die Aufgaben und einigen Sie sich auf eine Antwort.
- Schreiben Sie Ihr Resultat auf (1x pro Gruppe) evtl. mit Fragen, Kommentaren und geben Sie Ihre Namen an.
- Wenn Sie Themenwünsche oder Verbesserungsvorschläge haben, bitte ebenfalls notieren.
- Geben Sie Ihr Ergebnis an einem Sammelpunkt im Raum ab.

Aufgabe 1: Umgang mit Mengen

1) Welche der folgenden Mengen sind gleich?

$$\{1, 3, 4\}, \quad \{4, 3, 1, 4\}, \quad \{3, 1, 4\}, \quad \{3, 4, 1, 3\}, \quad \{\{1\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

2) Geben Sie die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ an (die sogenannte Potenzmenge).

3) Basteln Sie eine unendliche Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(A + A) \cap A = \emptyset$.

4) Geben Sie zu jeder Menge jeweils einige Elemente an, die darin enthalten sind und auch einige Elemente, die nicht darin enthalten sind. Wenn möglich, geben Sie einfachere Darstellungen der Mengen an.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| = |x - 3|\} \cup \{w \in \mathbb{R} \mid w^2 - w + 10 > 16\}$

b) $\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ ist obere Schranke von } [0, 1]\}$

c) $\{q \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} + q \in \mathbb{Q}\}$

d) Die Menge aller Teilmengen von \mathbb{R} .

e) $\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 2\}$

Aufgabe 2: Geometrische Veranschaulichung

Beim Umgang mit mathematischen Konzepten sind geometrische Darstellungen hilfreich, um eine *Anschauung* zu entwickeln und damit Zusammenhänge schneller erkennen zu können. Veranschaulichen Sie folgende Mengen

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\},$$

sowie für einige $x \in \mathbb{Z}$ die Äquivalenzklassen

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7k\}.$$

Wie stellen Sie sich die Folge $(3 + \frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ vor? Stellen Sie geometrisch dar, was beim Produkt der Zahlen $1 + i, i - 2, 1 - 3i$ mit der imaginären Einheit i geschieht. Wie wirkt sich das Produkt mit $1 + i$ aus?

Aufgabe 3: Folgen basteln

Definieren Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sowohl jede beliebig große Zahl übertrifft, als auch jede beliebige negative Zahl unterbietet und auch beliebig nahe an 2 herankommt, ohne jedoch 2 als Folgenglied zu enthalten. Stellen Sie ihr Ergebnis auch graphisch dar. Zeigen Sie, dass die Folge nicht konvergent ist.

Aufgabe 4: Beweise und Beweistechniken

Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

a) $a < b \Rightarrow a \leq b$

b) $a < b \wedge b > c \wedge c < d \Rightarrow a < d$

c) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Zeigen Sie (a) mit direktem Beweis und (b) mit einem Kontrapositionsbeweis, dass

$$\forall a, b > 0 : a^2 < b^2 \Rightarrow a < b.$$

Wie zeigt man

$$\forall a, b > 0, n \in \mathbb{N} : a^n < b^n \Rightarrow a < b.$$