Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Das Summensymbol

1) Seien $m < 0$ und $n > 0$ ganze Zahlen und seien $a_m, \dots, a_n$ positiv. Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$:
(Tipp: schreiben Sie die Summenausdrücke zum besseren Verständnis in der $+\cdots+$ Form, also z.B. $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$)

$$\sum_{\phi=m}^{n} a_\phi, \qquad \sum_{j=m+1}^{n+1} a_{j+1}, \qquad \sum_{t=n}^{m} a_t, \qquad \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}, \qquad \sum_{r=m}^{n}\left[\left(\sum_{s=m}^{r} a_s\right) - \left(\sum_{t=m}^{r-1} a_t\right)\right],$$

$$\sum_{\beta=n}^{m} a_{n-\beta+m}, \qquad \sum_{\lambda=0}^{n-m} a_{m+\lambda}, \qquad \sum_{\mu=-n}^{-m} a_{-\mu}, \qquad \sum_{k=m}^{n} a_i, \qquad \sum_{i=m}^{0} a_i + \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

2) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit *einem* Summensymbol:

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=2}^{n+1} b_j + \sum_{i=0}^{n-1} c_i, \qquad a_{n+1} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{m=0}^{n} b_m.$$

3) Beim Umgang mit *Doppelsummen* ist es hilfreich, die von den Indizes durchlaufenen Werte in einem Diagramm zu veranschaulichen. Markieren Sie dazu für die folgenden drei Doppelsummen jeweils die Paare $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, die in der Summation auftreten, als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem. Welche der Summenausdrücke sind gleich?

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$

4) Oft ist es nützlich, den Indexbereich bei der Summation durch eine Menge anzugeben. Sind a_i Zahlen, die mit einem Index $i \in I$ indiziert sind und ist $A \subset I$, so bezeichnet $\sum\limits_{i\in A} a_i$ die Summe aller a_i, deren Index i in A enthalten ist. Definitionsgemäß gilt $\sum\limits_{i\in\emptyset} a_i = 0$.

- Stellen Sie die Summe $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ in der Form $\sum\limits_{k\in A} a_k$ dar. Wie muss die Menge A definiert sein, damit beide Fälle $n < m$ und $n \geq m$ korrekt wiedergegeben werden?
- Für $j \in \mathbb{N}$ sei $B_j = \{k \in \mathbb{N} | k < j \wedge \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n\}$ und für beliebige $m \in \mathbb{N}$ sei $A_m = \{n \in \mathbb{N} | m - n > 0\}$. Was ist $\sum\limits_{m\in B_5}\sum\limits_{i\in A_m} a_i$.
- Unter welchen Bedingungen an A und B gilt $\sum\limits_{i\in A} a_i + \sum\limits_{j\in B} a_j = \sum\limits_{k\in A\cup B} a_k$
- Schreiben Sie $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} a_{(i,j)}$ als Summe mit einer geeigneten Indexmenge $A \subset \mathbb{N}^2$.

Aufgabe 2: Umgang mit mathematischen Sätzen

Einen mathematische Aussage veranschaulicht man sich üblicherweise durch folgende Schritte: (1) Was wird ausgesagt? Was sind die Voraussetzungen und wie lautet die Behauptung? (2) Wie sieht ein typisches Beispiel aus, das die Voraussetzungen erfüllt? Stimmt die Behauptung in diesem Fall? (3) Sind die Voraussetzungen wesentlich für die Behauptung? Gibt es Beispiele, die einzelne Voraussetzungen nicht erfüllen ohne dass die Behauptung falsch wird?
Zur Konkretisierung betrachten Sie folgende Aussage:

> *Eine streng monoton wachsende Folge ist konvergent, falls sie beschränkt ist.*

- Separieren Sie Voraussetzungen und Behauptung des Satzes.
- Formulieren Sie Voraussetzungen und Behauptung *ausschließlich* mit mathematischen Symbolen - also möglichst präzise.
- Untersuchen und veranschaulichen Sie die Aussage des Satzes:
  - Geben Sie ein typisches Beispiel an, das Voraussetzungen und Behauptung erfüllt.
  - Geben Sie Beispiele an, bei denen jeweils einzelne Voraussetzungen *nicht* erfüllt sind und die Behauptung *nicht* stimmt. Wenn Sie zu einer Voraussetzung *kein* solches Beispiel finden, dann liegt die Vermutung nahe, dass der Satz auch ohne die entsprechende Voraussetzung stimmt. Gibt es in diesem Beispiel eine solche Voraussetzung?

Nach dieser Vorbereitung können Sie sicher den Fehler im “Beweis” zu folgender Aussage finden:

> *Jede streng monoton wachsende Folge ist divergent.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend. Dann gilt $d_n = a_{n+1} - a_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen $d := \inf\{d_0, d_1, d_2, d_3, \dots\}$. Es gilt dann $a_{n+1} \geq d + a_n$ für alle n. Durch Induktion zeigt man damit, dass $a_n \geq a_0 + nd$ folgt. Da nd für genügend großes n jede positive Schranke überwindet (Archimedisches Prinzip), ist die Folge (a_n) unbeschränkt und somit divergent.