Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik **e**inüben in **G**ruppen**a**rbeit

Aufgabenblatt 5

Hinweise:

- Diskutieren Sie die Aufgaben und einigen Sie sich auf eine Antwort.
- Schreiben Sie Ihr Resultat auf (1x pro Gruppe) evtl. mit Fragen, Kommentaren und geben Sie Ihre Namen an.
- Wenn Sie Themenwünsche oder Verbesserungsvorschläge haben, bitte ebenfalls notieren.
- Wenn Sie fertig sind, bzw. nach Aufforderung, geben Sie Ihr Ergebnis ab und diskutieren Sie in Ihrer Gruppe den ausgeteilten Lösungsvorschlag.

Aufgabe 1: Training

a) Geben Sie die ersten fünf Terme der Rekursion an.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{a_n + \sqrt{a_{n-1}}}.$$

b) Geben Sie die Rekursionsvorschriften an, die zu den Folgen gehören:

$$1, \quad \frac{1}{1+1}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad \dots$$

$$1, \quad \frac{1}{2+1}, \quad \frac{1}{3+\frac{1}{2+1}}, \quad \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+1}}}, \quad \dots$$

c) Wann heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Geben Sie die Definition mit Worten an. Formulieren Sie danach die Definition *ausschließlich* mit Symbolen.

d) Konvergiert oder divergiert die Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^2 + n}$$

Aufgabe 2: Vektorräume

Überlegen Sie, ob in den folgenden Fällen V ein Vektorraum über K ist (wobei die skalare Multiplikation jeweils durch komponentenweise Multiplikation definiert ist). Ist Ihre Antwort "Ja", so geben Sie auch die Dimension an.

1. $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{Q}^n$
2. $K = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{C}^n$
3. $K = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{R}^n$
4. $K = \mathbb{Z}$ und $V = \mathbb{Q}^n$
5. $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{C}^n$

Da nicht alle die Vorlesung lineare Algebra besuchen gibt's ausnahmsweise nochmal die nötigen Definitionen für den ersten Teil der Aufgabe: V heißt Vektorraum über K, wenn K ein Körper ist (d.h. die Körperaxiome erfüllt) und wenn zwei Operationen $+, \cdot$ genannt *Vektoraddition* und *skalare Multiplikation* definiert sind mit folgenden Eigenschaften:

A0: Je zwei Elementen $u, v \in V$ ist genau ein Element $u + v \in V$ zugeordnet.

A1: $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$

A2: $\forall u, v \in V : u + v = v + u$

A3: $\exists 0 \in V : (\forall u \in V : u + 0 = u) \wedge (\forall u \in V : \exists(-u) \in V : u + (-u) = 0)$

M0: Je zwei Elementen $u \in V$ und $\alpha \in K$ ist genau ein Element $\alpha u \in V$ zugeordnet.

M1: $\forall u, v \in V, \alpha \in K : \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

M2: $\forall u \in V, \alpha, \beta \in K : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

M3: $\forall u \in V, \alpha, \beta \in K : (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M4: $\forall u \in V : 1 \cdot u = u$

Schließlich ist K^n die Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wobei jeder Eintrag x_i ein Element aus K ist. Die Abbildung $+$ ist komponentenweise erklärt $(x_1, \dots, x_n)+(y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Aufgabe 3: Erzeugendensystem, Unabhängigkeit, Basis

a) Bilden folgende Mengen Erzeugendensysteme im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$? Versuchen Sie dazu jeweils einen allgemeinen Vektor $\binom{x_1}{x_2}$ durch Linearkombination der Vektoren zu *erzeugen*. Gibt es unterschiedliche Möglichkeiten der Darstellung?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Sind die Vektoren $\binom{1}{-1}$, $\binom{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Wie ist es im $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{Q}$?

c) Bilden die Lösungen $\binom{x_1}{x_2}$ der Gleichung $3x_1 + 4x_2 = 1$ einen Unterraum von R^2?

d) Geben Sie eine Basis für den Lösungsraum der Gleichung $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ an? Welche Dimension hat der Raum.

Aufgabe 4: Körperwelten

Gegeben sei eine Menge mit zwei Elementen $M = \{A, \Omega\}$. Geben Sie alle möglichen zweistelligen Verknüpfungen auf M durch ihre Verknüpfungstabellen an. Mit welchen dieser Verknüpfungen kann man M zu einem Körper machen?