Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1: Nicht 5 gerade sein lassen

Zum Trainieren von klarer und sauberer Argumentation betrachten wir einige elementare Zusammenhänge von geraden und ungeraden Zahlen.

1) Schreiben Sie die Mengen G der geraden natürlichen Zahlen und U der ungeraden natürlichen Zahlen in Mengenschreibweise.

2) Beweisen Sie basierend auf Ihrer Mengendefinition: *Eine natürliche Zahl ist genau dann in G, wenn sie die Form $2m$ hat mit einem $m \in \mathbb{N}$.* (Wenn Sie jetzt ratlos sind, was da zu tun ist, beachten Sie, dass es sich um eine Äquivalenz, also um zwei Implikationen handelt. Beachten Sie weiter, dass $\{m \in M | A(m)\}$ definiert ist als Menge aller m aus M, für die $A(m)$ wahr ist. Zum Beweis müssen Sie also hier nur die *Definition* der Mengenschreibweise und die spezielle Form von $A(m)$ benutzen.)

3) Wir betrachten einen Beweis zu dem Satz: *Die Summe von zwei geraden natürlichen Zahlen ist gerade.* Überprüfen Sie, ob jeder Schritt durch eine *Definition* oder einen *Satz* begründet ist.

Beweis: Seien $n, m \in G$. Dann gilt nach (2), dass es $k, l \in \mathbb{N}$ gibt, mit $n = 2k$ und $m = 2l$. Also folgt $n + m = (2k) + (2l) = 2(k + l) = 2r$ mit $r = k + l$. Da $k, l \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ abgeschlossen ist bezüglich Addition folgt $r \in \mathbb{N}$. Erneute Benutzung von (2) zeigt $n + m \in G$.

4) Beweisen Sie wie in (3) bzw. besser als in (3), falls Hinweise auf Definitionen und Sätze fehlen, dass die Summe von zwei ungeraden natürlichen Zahlen gerade ist.

5) Beweisen Sie so sorgfältig wie in (4) verlangt: *Das Quadrat von ungeraden Zahlen ist ungerade.*

6) Zeigen Sie sorgfältig: *Eine natürliche Zahl die nicht gerade ist, muss ungerade sein.* Formulieren Sie zunächst die Aussage mit Symbolen. Sie wissen natürlich, dass die geraden und ungeraden Zahlen zusammen die natürlichen Zahlen bilden. Können Sie das beweisen und können Sie mit dieser Hilfsaussage die obige Aussage begründen? Tipp: Da sie alle Beweisschritte auf Definitionen oder Sätze zurückführen müssen, sollten Sie irgendwann auch die Definition der natürlichen Zahlen brauchen!

Aufgabe 2: Übersetzung Symbole → Anschauung

1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Was bedeutet folgende Aussage geometrisch? Geben Sie je ein Beispiel für f an, so dass die Aussage erfüllt bzw. nicht erfüllt ist.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)] : \exists x \in [a, b] : f(x) = y.$$

2) Die Menge $\mathcal{F}(A, B)$ enthalte alle Funktionen $f : A \to B$. Zeigen Sie durch ein konkretes Beispiel, dass folgende Aussage wahr ist.

$$\exists f \in \mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R}) : \exists x \in [-1, 1] : \forall \theta \in [0, 1] : f(x) \neq (1 - \theta)f(-1) + \theta f(1).$$

Aufgabe 3: Fingerübung mit Funktionen

1) Sei $f : D \to B$ eine Funktion und $A, C \subset D$. Überlegen Sie sich mit "Eiermengen", die wenige Punkte beinhalten, dass $f(A \cap C) \subset f(A) \cap f(C)$ gilt und beweisen Sie die Aussage danach sorgfältig. Sie *müssen* dabei die Definition der Konstruktion $f(\text{Menge})$ benutzen.

2) Geben Sie Beispiele reeller Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ und Teilmengen $A, C \subset [0, 1]$ an, so dass $f(A \cap C) = f(A) \cap f(C)$, bzw. $f(A \cap C) \neq f(A) \cap f(C)$ gilt.

3) Was ist eigentlich $f(\emptyset)$? Beweis!

4) Geben Sie eine genaue geometrische Bedingung an, mit der Sie anhand des Graphen einer

reellen Funktion $f : D \to B$ mit $D, B \subset \mathbb{R}$ überprüfen können, ob die Funktion injektiv, surjektiv, oder bijektiv ist.