Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1: Gleichheit von Funktionen

Kann es sein, dass zwei Funktionsvorschriften unterschiedlich "aussehen" und trotzdem die gleiche Funktion beschreiben? Hier ist ein Beispiel: Finden Sie eine möglichst große Menge $D \subset \mathbb{R}$, so dass die folgenden Funktionen gleich sind.

$$\begin{array}{rcl} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

Aufgabe 2: Stetigkeiten

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche Aussage charakterisiert Stetigkeit, welche gleichmäßige Stetigkeit? (Bem: "charakterisiert" bedeutet "ist äquivalent zu". Wenn Sie also der Meinung sind, dass eine Aussage weder Stetigkeit noch gleichmäßige Stetigkeit charakterisiert, dann müssen Sie entweder ein konkretes Beispiel mit einer unstetigen Funktion angeben, so dass die Aussage wahr ist, oder ein Beispiel mit einer stetigen Funktion, für das die Aussage falsch ist.)

1. $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
3. $\forall \epsilon > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
4. $\forall x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$
5. $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Aufgabe 3: Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Wenn Sie gewisse Klimmzüge in Vektorräumen wie Basiswechsel oder Matrixdarstellung von linearen Abbildungen nicht nachvollziehen können, liegt das vielleicht daran, dass Sie nicht die "richtigen" Beispiele vor Augen haben. Mein Rezept für bessere Beispiele: *Denken Sie an Vektorräume, deren Elemente* keine *Zahlentupel sind, d.h. bei denen sich die Vektoren deutlich von ihren Koordinaten(vektoren) unterscheiden. Diese deutliche Trennung ist sehr wichtig, wenn es um Basisdarstellungen von Vektoren oder linearen Abbildungen sowie um das Verhalten dieser Darstellungen bei Basiswechseln geht.*
Besonders geeignet sind hierzu die Polynomräume: die Vektoren sind Polynome, also Funktionen auf kontinuierlichen Mengen (Intervallen) und daher sicherlich nicht mit Zahlentupeln zu verwechseln. Außerdem werden für wichtige Anwendungen (Interpolationsaufgaben) unterschiedlichste Basen benötigt, zwischen denen immer wieder gewechselt werden muss. Schließlich gibt's viele sinnvolle lineare Abbildungen auf den Polynomen, zu deren Definition keine Basis eingeführt werden muss (koordinatenfreie Definition). Solche Beispiele veranschaulichen den Effekt von Matrixdarstellungen zu linearen Abbildungen. Aber jetzt mal konkreter:

1. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathcal{P}_d$ der reellen Polynome vom Grad $\leq d$ einen Unterraum des Vektorraums $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$ darstellt (Summe und skalare Multiplikation sind wie üblich punktweise definiert, d.h. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ für alle $x \in I$ und $\lambda \in \mathbb{R}$).

2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathcal{T}_a : V \to V$ definiert durch $\mathcal{T}_a(f) : x \mapsto f(x-a)$ heißt Translation (wieso?). Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_a$ linear ist und das $\mathcal{T}_a$ den Unterraum $\mathcal{P}_d$ in sich selbst abbildet.

3. Sei $y \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\delta_y : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta_y(f) = f(y)$ heißt Punktauswertung in y (wieso?). Zeigen Sie, dass δ_y linear ist.

4. Sei $\sigma > 0$. Die Abbildung $\mathcal{S}_\sigma : V \to V$ definiert durch $\mathcal{S}_\sigma(f) : x \mapsto f(\sigma x)$ heißt ... schlagen Sie was vor! Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}_\sigma$ linear ist und das $\mathcal{S}_\sigma$ den Unterraum $\mathcal{P}_d$ in sich selbst abbildet.

5. Sei $m : x \mapsto x^2 - 2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{M} : V \to V$ definiert durch punktweise Multiplikation mit dem festen Polynom m, also $\mathcal{M}(f) : x \mapsto m(x)f(x)$, linear ist und $\mathcal{P}_d$ in $\mathcal{P}_{d+2}$ abbildet.

6. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\delta_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ in der Monom-Basis (q_0, q_1, q_2) mit $q_k : x \mapsto x^k$ an. Wie lautet die Matrixdarstellung bezüglich der Basis (p_0, p_1, p_2) mit $p_k : x \mapsto (x-1)^k$?

7. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ in der Monom-Basis (q_0, q_1, q_2) an. Wie lautet die Matrixdarstellung bezüglich der Basis (p_0, p_1, p_2)?

8. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{M} : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_3$ an bezüglich der Basis (q_0, q_1) von $\mathcal{P}_1$ und (p_0, p_1, p_2, p_3) von $\mathcal{P}_3$.

9. Wenden Sie in der Zukunft hin und wieder die Konzepte der linearen Algebra auf die Polynombeispiele an :-)