Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1: Erweitern Sie Ihren Beispielkatalog

Kennen Sie Funktionen die stetig und *nicht* gleichmäßig stetig sind? Geben Sie vier verschiedene Beispiele $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ auf den Definitionsmengen $D_1 = (0,1)$, $D_2 = (0,2)$, $D_3 = [3,\infty)$, $D_4 = [4,\infty)$ an, wobei f_2 und f_4 zusätzlich beschränkt sein sollen. Finden Sie auch ein Beispiel auf $D_5 = [5,6]$?

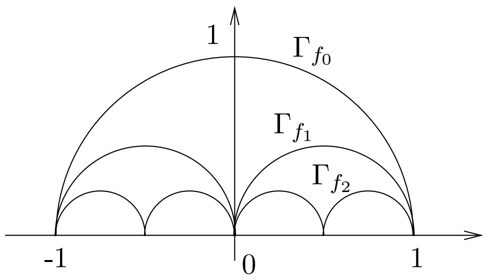
Beispiele sind $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = \mathrm{zack}(1/x)$ (oder auch $f_2(x) = \sin(1/x)$ wenn Sie es glatter mögen), $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = \mathrm{zack}(x^2)$ (bzw. $f_4(x) = \sin(x^2)$). Die Stetigkeit bei diesen Beispielen folgt mit dem Baukastenprinzip aus der Stetigkeit der beteiligten Grundfunktionen und der Stetigkeit von Verkettungen. Die fehlende gleichmäßige Stetigkeit zeigt man jeweils durch Widerspruch. Nehmen wir z.B. an, die Funktion f_3 wäre gleichmäßig stetig. Dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass $|f_3(y) - f_3(x)| < 1$ falls nur $|y - x| < \delta$ und $x, y \in D_3 = [3,\infty)$. Insbesondere hätten wir also für $x = 1/\delta$ und $y = x + \delta/2$

$$1 > |f_3(y) - f_3(x)| = |y^2 - x^2| = x^2 + x\delta + \delta^2/4 - x^2 = 1 + \delta^2/4 > 1$$

also den Widerspruch $1 > 1$. Das Problem ensteht dadurch, dass für große Argumente die Steigung von f_3 stark anwächst und somit eine kleine feste δ-Schwankung zu beliebig großen Ausschlägen in den Funktionswerten führen kann, wenn die δ-Schwankung bei genügend großen Argumenten durchgeführt wird. Mit ähnlichen Beweisen kann man in den anderen Fällen arbeiten.
Auf dem kompakten (d.h. beschränkt und abgeschlossenen) Intervall $D_5 = [5,6]$ ist jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig. Hier lässt sich also kein Beispiel finden.

Aufgabe 2: Die Kreiszahl π einmal anders ...

Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Der Graph Γ_{f_n} von f_n sei dabei die Vereinigung von 2^n Halbkreisen mit Radien 2^{-n} (siehe Skizze).



1. Geben Sie eine Funktionsvorschrift für f_n an. Hinweis: am einfachsten definiert man f_n stückweise auf geeigneten Teilintervallen von [-1,1] mit Hilfe von skalierten und verschobenen Versionen von $f_0(x) = \sqrt{1-x^2}$.
   Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Radius $r_n = 2^{-n}$, den Durchmesser $d_n = 2r_n$, die Kreismittelpunkte $x_k^{(n)} = -1 + (k - 1/2)d_n$, wobei $k = 1, \dots, 2^n$ und die Intervalle $I_k^{(n)} = x_k^{(n)} + [-r_n, r_n]$. Dann ist $f_n(x)$ für $x \in [-1,1]$ definiert durch
   $$f_n(x) = r_n f_0\left(\frac{x - x^{(n)}}{r_n}\right) \qquad \text{falls } x \in I_k^{(n)}.$$

2. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig. Wie lautet der Grenzwert f?
   Der Grenzwert ist die Nullfunktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $r_n < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, da $r_n = 2^{-n}$ eine Nullfolge ist. Da f_0 durch 1 beschränkt ist, ist f_n durch r_n beschränkt und damit gilt $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq r_n < \epsilon$ für alle $x \in [-1,1]$ und alle $n \geq N$. Damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

3. Zeigen Sie dass die Länge L_n der Graphen Γ_{f_n} konvergiert. Wie lautet der Grenzwert?
   Es gilt $L_n = 2^n(2\pi r_n)/2 = \pi$ für alle n. Damit konvergiert L_n gegen π.

4. Da die Funktionsgraphen Γ_{f_n} *gleichmäßig* gegen den Graphen Γ_f konvergieren, konvergiert auch deren Länge gegen die Länge des Grenzgraphen Γ_f. Ermitteln Sie diese Länge und bestimmen Sie damit die Kreiszahl π.
   Die Länge L des Graphen von f ist offensichtlich $L = 2$. Würde die Länge tatsächlich konvergieren, so wäre $\pi = \lim L_n = L = 2$. Das ist natürlich falsch, d.h. in der Argumentation steckt ein Fehler. Die Länge $\Lambda(g)$ des Graphen einer stetigen und stückweise differenzierbaren Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ berechnet sich mit dem Integral

   $$\Lambda(g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + g'(x)}\, dx.$$

   Betrachtet man eine Folge von Funktionen (f_n), die gleichmäßig konvergiert, so gilt im allgemeinen *nicht* $\lim \Lambda(f_n) = \Lambda(\lim f_n)$. Hierzu wäre die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen (f'_n) gegen f' eine hinreichende Bedingung, die in unserem Beispiel aber *nicht* gegeben ist. Wie sieht nämlich (f'_n) aus?

Aufgabe 3: Sauberes Argumentieren

Untersuchen Sie welches Monotonieverhalten die Verkettung $h = g \circ f$ einer streng monoton fallenden Funktion f mit einer monoton fallenden Funktion g hat.

1. Überlegen Sie, wie sich h verhält (Schmierzettel).
   Wenn das Argument wächst, nimmt f ab und damit wächst $h = g(f)$ monoton.

2. Formulieren Sie eine Behauptung über das Verhalten von h mit geeigneten Vorraussetzungen an f und g.
   Sei $f : D \to E$ streng monoton fallend und $g : E \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann ist die Funktion $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

3. Schreiben Sie die Definitionen für die in Behauptung und Voraussetzung auftretenden Monotonieverhalten auf.
   Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend, streng monoton fallend) falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ stets gilt $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$).

4. Beweisen Sie Ihre Behauptung durch sorgfältigen Nachweis und Ausnutzung der Definitionsbedingungen.
   Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Dann sind $f(x), f(y) \in E$ und (nach Definition der strengen Monotonie) $f(y) < f(x)$. Da g monoton fallend ist, folgt wieder nach Definition $h(y) = g(f(y)) \geq g(f(x)) = h(x)$, also $h(x) \leq h(y)$. Die Definition zeigt, dass h monoton wachsend ist.