Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik **e**inüben in **G**ruppen**a**rbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1: Bringen Sie (sich) in Form

Ein wichtiger Bestandteil der Mathematik ist es, wiederholt auftretende Muster und Konzepte als solche zu erkennen und, nach einem Abstraktionsprozess, ihre Essenz knapp und präzise zu beschreiben. Dies geschieht mit Symbolen in Definitionen (Beispiel: das Summensymbol). Umgekehrt ist die Anwendung von allgemeinen Ergebnissen (Sätzen) in konkreten Situationen nur dann möglich, wenn eine *Übersetzung* in geeignete abstrakte Konzepte möglich ist (Beispiel: die geometrische Summenformel). Bei diesen Übersetzungen ist es hilfreich, Namen zu vergeben, die den Zusammenhang zwischen konkreter Variante und abstrakter Form herstellen. Ist also das allgemeine Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

und kommt in einer konkreten Situation der Ausdruck $\sum_{m=n}^{k}(1-\frac{q}{x})^m$ vor, so stellt man den Zusammenhang durch geeignete Abkürzungen her. Die Summationsvariable ersetzt man z.B. durch $i = m - n$, so dass die untere Summationsgrenze wie gewünscht 0 und die obere $N = k - n$ ist. Weiter definiert man $a = 1 - q/x$ und erhält

$$\sum_{m=n}^{k} \left(1 - \frac{q}{x}\right)^m = \sum_{i=0}^{N} a^{i+n} = a^n \sum_{i=0}^{N} a^i$$

Nun ist die geometrische Summenformel verwendbar, falls $a \neq 1$ also $q/x \neq 0$

$$a^n \sum_{i=0}^{N} a^i = a^n \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

Am Ende vernichtet man die eingeführten Namen wieder, indem man rücksubstituiert

$$\sum_{m=n}^{k} \left(1 - \frac{q}{x}\right)^m = \frac{x}{q}\left(\left(1-\frac{q}{x}\right)^n - \left(1-\frac{q}{x}\right)^{k+1}\right).$$

Den Übersetzungsprozess *müssen* Sie beherrschen. Beachten Sie, dass die Erzeugung der gleichen *Form* nicht bedeutet, dass die Variablen identisch sein müssen, d.h. statt q kann a, b etc. stehen und statt k und n können i und N auftreten usw. Wichtig ist nur, dass die Struktur die gleiche ist. Hier ist die Übung dazu (die Aufgaben können Sie sich auch selbst basteln!)

1. Bringen Sie die Ausdrücke durch geeignete Abkürzungen auf Standardform $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

   (a) $\sum_{k=4}^{\infty} k a_k x^{k-1}$
   Wir definieren $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ und $b_n = (n+1)a_{n+1}$ für $n \geq 3$. Dann gilt $\sum_{k=4}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ – berechnen Sie die Ableitung *nach* der Transformation in Standardform und machen Sie ihre Abkürzungen anschließend rückgängig.
   Wir setzen $a_k = 0$ für k gerade und $a_k = 1/k!$. Dann ist die Reihe in Standardform, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Der Satz über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen ergibt für die Ableitung $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Beachten wir, dass nur die Koeffizienten a_k mit ungeraden k von Null verschieden sind, ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(c) $\sum_{x=1}^{\infty} x^n a^x$
Hier ist es sinnvoll, den ungewöhnlichen und daher verwirrenden Summationsindex durch eine üblichere Variante $k = x$ zu ersetzen. Die Koeffizientenfolge der Reihe ist dann durch $b_0 = 0$ und $b_k = k^n$ für $k \geq 1$ gegeben mit einem festen Parameter n, der hier nicht näher spezifiziert ist. Schließlich ersetzt man z.B. $y = a$ und erhält dann $\sum_{x=1}^{\infty} x^n a^x = \sum_{k=0}^{\infty} b_n y^k$.

2. Nach dem Aussonderungsprinzip können Teilmengen einer Menge M gebildet werden, die aus allen Elementen $x \in M$ bestehen, für die eine bestimmte Aussage $A(x)$ wahr ist. Die Schreibweise für diese Menge ist $\{x \in M | A(x)\}$. Geben Sie in den folgenden Fällen jeweils M und A an.

   (a) $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
   Hier ist z.B. $M = \mathbb{N}_0$ und $A(x) = \exists k \in \mathbb{N}_0 : x = 2k$.

   (b) $\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$
   Wir nehmen an, dass $f : \mathbb{R} \to B$ eine Funktion mit Wertemenge B ist. Dann lässt sich die Menge mit $M = B$ und $A(y) = \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ in der Form $\{x \in M : A(x)\}$ schreiben.

   (c) Die Menge der differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
   Hier ist $M = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $A(f) = \forall a \in \mathbb{R} : \exists L \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a}(f(x) - f(a))/(x - a) = L$.

3. Aussagen mit Quantoren haben die Standardform $\exists x \in M : A(x)$ bzw. $\forall x \in M : A(x)$, wobei M eine Menge und A eine Aussageform ist. Schreiben Sie folgende Aussagen um, so dass *alle* beteiligten Quantorenausdrücke in dieser Standardform auftreten.

   (a) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x > y$
   Eine Möglichkeit ist $M = \mathbb{R}^2$ und $A(z) = z_1 > z_2$, also $\exists z \in \mathbb{R}^2 : z_1 > z_2$. Eine weitere Möglichkeit ist $M = \mathbb{R}$, $A(x) = \exists y \in \mathbb{R} : x > y$.

   (b) $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
   Hier benötigt man die Mengen $(0, \infty)$ und $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\}$. Damit schreibt man $\forall \epsilon \in (0, \infty) : \exists \delta \in (0, \infty) : \forall y \in B_\delta(x) : |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

4. Bei der Überprüfung von Stetigkeit oder Differenzierbarkeit können die Sätze über Vielfache, Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen angewendet werden, wenn die konkrete Funktion als Mischung aus Vielfachen, Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen geschrieben werden kann. Dazu muss man die Verknüpfungsstruktur genau erkennen und das macht man wieder durch das Einführen neuer Funktionsnamen. So ist etwa $f(x) = 4\sin(x - \cos(x))$ von der Form $f = \lambda F$ mit $F = \sin \circ g$, $g = h + k$ und $h(x) = x$, $k = (-1)\cos$. Zerlegen Sie folgende Ausdrücke in elementare Verknüpfungen.

   (a) $(5\exp(x) + x^2)/(\exp(3x) + x^4)$
   Mit $f_1 = 5\exp$, $f_2(x) = x^2$, $f_3 = f_1 + f_2$, $f_4(x) = 3x$, $f_5 = \exp \circ f_4$, $f_6(x) = x^4$, $f_7 = f_5 + f_6$ ist $f = f_3/f_7$.

   (b) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(3x + \exp(y))$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
   Wir definieren Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ durch $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = 3x$ und $f_3(x, y) = \exp(y)$. Beachten Sie, dass f_2 und f_3 auch Funktionen von zwei Variablen sind, um sicherzustellen, dass die Verknüpfungen $f_4 = f_2 + f_3$, $f_5 = \cos \circ f_4$ und $f = f_7 + f_5$ Funktionen zweier Variablen sind. Hier ist $f_7 = \sin \circ f_1$.

5. Um Definitionen anwenden zu können, muss ein konkreter Ausdruck normalerweise durch Umbenennung in die passende Form gebracht werden. So kann z.B. das Label “konvergent”

nur dann vergeben werden, wenn die Situation durch Einführung sinnvoller Namen mit der Form der Definition

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

zur Deckung gebracht werden kann. Statt ϵ, N, n, a_n, a können natürlich andere Buchstaben benutzt werden. Wichtig ist nur, dass die Form exakt gleich ist.

(a) Bei gegebenem $\epsilon > 0$ gelte $|a_n + 1/n - a + 4| < 5\epsilon$ falls $n > 2/\epsilon$. Konvergiert hier was? Führen Sie geeignete Abkürzungen ein, um die Definition anwenden zu können.
Zunächst geht es hier um die Folge (c_n) mit $c_n = a_n + 1/n$ und den Grenzwert $c = a - 4$. Wir wollen zeigen, dass dann

$$\forall\eta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \geq M : |c_n - c| < \eta$$

gilt. Dazu geben wir irgend ein $\eta > 0$ vor. Setzt man dann $\epsilon = \eta/5$ und wählt man $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq 2/\epsilon + 1$, so gilt für alle $n \geq M$, die Abschätzung $|c_n - c| < \eta$. Also konvergiert c_n gegen c.

6. Auch beim Anwenden von Sätzen muss erst durch Einführung von geigneten Abkürzungen die spezielle Form in die allgemeine des Satzes überführt werden. Übrigens: je mehr Erfahrung Sie haben, desto schneller sehen Sie diese Übersetzung und schließlich geht das automatisch. Nur wenn es sehr verwirrend wird, muss man durch gute Abkürzungen wieder Klarheit schaffen. Als Beispiel wenden Sie bitte den Mittelwertsatz: *Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ so dass $(f(b) - f(a)/(b - a) = f'(\xi)$.* in der folgenden Situation an.

(a) Sei $f : (a, b) \to (0, \infty)$ differenzierbar und seien $x, y \in (a, b)$. Was können Sie zum Ausdruck $1/f(x) - 1/f(y)$ sagen? Führen Sie geeignete Abkürzungen ein (was entspricht a, b im Mittelwertsatz, was entspricht f im Mittelwertsatz etc.).
Die Funktion um die es hier geht ist offensichtlich $g = 1/f$ auf dem Intervall $[A, B]$ wobei $A = \min\{x, y\}$ und $B = \max\{x, y\}$. Haben Sie stillschweigend vorausgesetzt, dass $x < y$ gilt ... Ätsch. Es kann sogar $x = y$ möglich sein. Deshalb sind hier zwei Fälle zu beachten. Im Fall $x = y$ gilt offensichtlich $g(x) - g(y) = 0$. Im Fall $x \neq y$ kann der Mittelwertsatz benutzt werden, da $A < B$ ist und g stetig auf $[A, B]$ ist ja sogar differenzierbar auf dem abgeschlossenen Intervall. Also gibt es ein $\xi \in (A, B)$ so dass $g(B) - g(A) = g'(\xi)(B - A)$ gilt. Nun ist entweder $x = A$ oder $x = B$. In jedem Fall erhalten wir (eventuell nach Multiplikation mit -1) $g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y)$. Jetzt muss man die neuen Namen wieder vernichten und beachten, dass $g' = -f'/f^2$. Also

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} = -\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}(x - y)$$

für ein ξ zwischen x und y.

7. Zum Schluss noch ein kleines Spiel mit Funktionen. Eine Funktion wird dadurch definiert, dass man die Definitionsmenge D, die Wertemenge E und eine eindeutige Zuordnungsvorschrift angibt, so dass *jedem* Element von D ein Element von E zugeordnet wird. Die folgenden Ausdrücke beinhalten eine Zuordnungsvorschrift, allerdings fehlen die Angaben über Definitions- und Wertebereich. Wählen Sie sinnvolle Mengen D, E und einen Funktionsnamen F, so dass $F : D \to E$ mit der angegebenen Vorschrift tatsächlich eine Funktion beschreibt.

(a) $u \mapsto u'$
Als Beispiel wählen wir A als die Menge der differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ und B als die Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Abbildung nennen wir $D : A \to B$ mit der Vorschrift $D(u) = u'$.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Die Vorschrift sei $u \mapsto u'(t)$.
Hier kommen Zahlen als Ergebnis raus! Also $E = \mathbb{R}$ und A ist wieder die Menge der differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Abbildung $F : A \to \mathbb{R}$ liefert also die Ableitung an der festen Stelle t, d.h. $F(u) = u'(t)$.

(c) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Die Vorschrift sei $u(t) \mapsto u'$.
Hier wird einer Zahl eine Funktion zugeordet. Damit insgesamt die Vorschrift zu einer Funktion wird, ist als Definitionsmenge $D = \{u(t)\}$ zu wählen und als Wertemenge $\{u'\}$ für eine feste Differenzierbare Funktion u auf $\mathbb{R}$. Die Funktion ist also langweilig: dem einzigen Element des Definitionsgebiets wird das einzige Element des Wertebereichs zugeordnet.

(d) $u' \mapsto u$
Hier wird einer Funktion eine Stammfunktion zugeordnet. Da sich zwei Stammfunktionen immer um eine Konstante unterscheiden können, ist aber nicht klar, welche Stammfunktion genommen werden soll. Durch Festlegen eines Funktionswertes der Stammfunktion an einer bestimmten Stelle kann die Eindeutigkeit der Zuordnung erreicht werden. Wir wählen deshalb D als die Menge aller Ableitungen von differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ und den Wertebereich E als Menge aller reelwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann definiert die Zuordnung $F : w \mapsto$ (Stammfunktion W von w mit $W(0) = 0$) eine Abbildung $F : D \to E$.

(e) $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$
Hier ist z.B. D die Menge aller integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ und $E = \mathbb{R}$. Die Abbildung $F : D \to E$ ist durch $F(u) = \int_a^b u(t)dt$ gegeben.

(f) $f \mapsto \big(x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt\big)$
Sei D wieder die Menge aller integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ aber E sei nun (z.B.) die Menge aller Funktionen auf $[a, b]$. F ordnet also jeder Funktion $f \in D$ die Funktion $F(f)$ zu mit $F(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.