Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 2

Hinweis:

- Nutzen Sie dieses Blatt, um ihre bei der Lösung aufgetretenen Fragen in Eigenregie sinnvoll zu beantworten.

Aufgabe 1: Umgang mit Mengen

1) Welche der folgenden Mengen sind gleich?

$$\{1,3,4\}, \quad \{4,3,1,4\}, \quad \{3,1,4\}, \quad \{3,4,1,3\}, \quad \{\{1\},\{3\},\{4\}\}.$$

Nach Definition sind zwei Mengen A und B gleich, wenn jedes Element von A in der Menge B und jedes Element von B in der Menge A ist. Folglich gilt $\{1,3,4\} = \{4,3,1,4\}$, denn

$$1 \in \{4,3,1,4\}, \quad 3 \in \{4,3,1,4\}, \quad 4 \in \{4,3,1,4\}$$

und

$$4 \in \{1,3,4\}, \quad 3 \in \{1,3,4\}, \quad 1 \in \{1,3,4\}$$

Es gilt also insbesondere, dass Elemente mehrfach aufgeführt werden können, ohne die Menge dabei zu ändern! Damit:

$$\{1,3,4\} = \{4,3,1,4\} = \{3,1,4\} = \{3,4,1,3\}.$$

Die Menge $\{\{1\},\{3\},\{4\}\}$ unterscheidet sich dagegen von $\{1,3,4\}$, da sie *andere* Elemente beinhaltet. Die Elemente von $\{\{1\},\{3\},\{4\}\}$ sind spezielle *Teilmengen* der natürlichen Zahlen, während $\{1,3,4\}$ nur natürliche Zahlen enthält. Auch wenn eine Menge nur ein Element enthält, ist sie nicht gleich diesem Element (denken Sie sich Mengen als immaterielle Verpackungen: eine Tüte mit einem Salatkopf drin ist eben nicht nur ein Salatkopf sondern ein verpackter Salatkopf!).

2) Geben Sie die Menge aller Teilmengen von $\{1,2,3\}$ an (die sogenannte Potenzmenge).

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Beachten Sie, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Wieso?

3) Basteln Sie eine unendliche Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(A+A) \cap A = \emptyset$.

Nochmal zur Erläuterung (siehe Vorlesung)

$$A + B := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists a \in A, b \in B : x = a + b\}.$$

Ein mögliches Beispiel ist die Menge $A = \{1,3,5,7,9,\dots\}$ aller ungeraden natürlichen Zahlen. Die Summe $A + A$ sind dann die geraden Zahlen und keine Zahl ist gerade *und* ungerade, so dass $(A+A) \cap A = \emptyset$. (Bem: $\cap$ bedeutet "geschnitten mit")

4) Geben Sie zu jeder Menge jeweils einige Elemente an, die darin enthalten sind und auch einige Elemente, die nicht darin enthalten sind. Wenn möglich, geben Sie einfachere Darstellungen der Mengen an.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| = |x-3|\} \cup \{w \in \mathbb{R} \mid w^2 - w + 10 > 16\}$
Die Menge kann geschrieben werden als $(-\infty, -2) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$. Also liegen z.B. -5,2,4 in der Menge und -1,0,3 außerhalb.

b) $\{M \in \mathbb{R} \mid M$ ist obere Schranke von $[0,1]\}$
Diese Menge ist gleich $[1, \infty)$ also liegen 1,100,1000 z.B. drin und 9/10, 0, -1 nicht.

c) $\{q \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} + q \in \mathbb{Q}\}$
Das ist gemein, denn dies ist die leere Menge, da es keine rationale Zahl gibt, die zu $\sqrt{2}$ hinzuaddiert wieder rational ist (wieso fragen Sie sich? Wenn es so eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ gäbe mit $\sqrt{2} + q = r \in \mathbb{Q}$, dann wäre $\sqrt{2} = r - q$ als Differenz von zwei rationalen Zahlen auch rational - was ja bekanntlich falsch ist). Dementsprechend gibt es viele Elemente außerhalb, z.B. 0,1,-1/2.

d) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
Hier gibt's nicht viel zu vereinfachen - diese Menge heißt *Potenzmenge* von $\mathbb{R}$, kurz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Elemente dieser Menge sind Teilmengen von $\mathbb{R}$. Aber denken Sie nicht nur an die Arbeitspferde $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$. Dazu gehören auch $\{\sqrt{2}\}$ oder $\{\pi, -1, 1/3\}$ oder Intervalle $(0,1]$ oder Vereinigungen von Intervallen $(-3,5] \cup [7, 5\pi)$ usw. Aber was ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}$??? Schauen Sie sich mal Aufgabenteil 1 an: die Zahlen selbst, also z.B. 0 oder π oder -1 sind keine Teilmengen von reellen Zahlen sondern "nur" reelle Zahlen.

e) $\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 2\}$ Hier sollen Sie auch noch mal ein bisschen Summensymbol üben! Es ist

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 < 2,$$
$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2,$$
$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2$$
$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} > 2$$

Also ist die Menge identisch mit $\{1,2,3\}$ und damit ist klar, was drin liegt. Draußen liegt z.B. $-\sqrt{2}$ aber natürlich auch 4.

<u>Aufgabe 2:</u> Geometrische Veranschaulichung

Beim Umgang mit mathematischen Konzepten sind geometrische Darstellungen hilfreich, um eine *Anschauung* zu entwickeln und damit Zusammenhänge schneller erkennen zu können. Veranschaulichen Sie folgende Mengen

$$\{z \in \mathbb{C} | z = \bar{z}\}, \quad \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

Entschuldigen Sie, dass ich aus Zeitnot kein Grafikprogramm angeworfen habe. Die erste Menge entspricht der reellen Achse, wenn Sie die komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene zeichnen (typischerweise ist die horizontale Achse eines kartesischen Koordinatensystems die reelle und die vertikale Achse die imagiäre Achse). Die zweite Menge entspricht einer Kreisscheibe in der Ebene mit Radius 1 um den Ursprung, wobei der Kreisrand zur Menge dazugehört.

sowie für einige $x \in \mathbb{Z}$ die Äquivalenzklassen

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7k\}.$$

Beachten Sie, dass die linke Seite $[x]$ durch die rechte Seite definiert ist und die Menge auf der rechten Seite können Sie grafisch darstellen. Es handelt sich ja hierbei um Zahlen, die als Punkte auf dem Zahlenstrahl, d.h. der reellen Achse ;-) dargestellt werden können. Insbesondere umfasst $[x]$ alle ganzzahligen Punkte, die von x ein Vielfaches von 7 entfernt sind. Zum Beispiel umfasst die Äquivalenzklasse $[0]$ die Zahlen $\{0, -7, 7, -14, 14, -21, 21, \dots\}$.

Wie stellen Sie sich die Folge $(a_n) = (3 + \frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ vor?

Hoffentlich haben Sie hier keinen kontinuierlichen Funktionsgraphen gezeichnet! Erinnern Sie sich an die Vorlesung? Zum Beispiel können Sie die Wertepaare (n, a_n) in einem kartesischen Koordinatensystem einzeichnen (die "Filmrolle" der Vorlesung). Oder Sie markieren die Punkte a_n einfach auf der Zahlengerade. Da sehen Sie dann "Einschläge" um die 3 herum, die immer näher kommen und abwechselnd rechts und links davon liegen.

Stellen Sie geometrisch dar, was beim Produkt der Zahlen $1 + i, i - 2, 1 - 3i$ mit der imaginären Einheit i geschieht. Wie wirkt sich das Produkt mit $1 + i$ aus?

Zunächst sollten Sie mal ausrechnen, was $i(1 + i)$ ist. Es ergibt sich $i - 1$. Tragen Sie dann $1 + i$ als Vektor in der komplexen Zahlenebene ein, d.h. markieren Sie den Punkt $(1, 1)$ bzw. zeichnen Sie den Vektor von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$. Das Ergebnis der Multiplikation entspricht dem Vektor von $(0, 0)$ nach $(-1, 1)$. Zwischen den beiden Vektoren entdecken Sie einen Winkel von $90°$. Das gleiche entdecken Sie bei den Vektoren $i - 2$ und $i(i - 2) = -1 - 2i$ sowie $1 - 3i$ und $i(1 - 3i) = 3 + i$. Multiplikation mit i dreht also die Ausgangszahl um $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn! Wenn Sie mit $1 + i$ multiplizieren dreht sich's nur um $45°$ und die Ergebniszahl ist um $\sqrt{2}$ länger geworden.

Aufgabe 3: Folgen basteln

Definieren Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sowohl jede beliebig große Zahl übertrifft, als auch jede beliebige negative Zahl unterbietet und auch beliebig nahe an 2 herankommt, ohne jedoch 2 als Folgenglied zu enthalten.

Da gibt es viele Möglichkeiten! Meine Idee war

$$a_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n} & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ n & \text{falls } n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ -n & \text{falls } n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wenn Sie unbedingt alles in *einer* Formel haben wollen, bedanken Sie sich bei Patrick Kurth für folgenden Vorschlag

$$a_n = 2 + \left((-1)^{\frac{n(-1)^n+n}{2}} n^{(-1)^n}\right).$$

Stellen Sie ihr Ergebnis auch graphisch dar.

Na dann lassen Sie mal die Punkte knallen! Insbesondere die Folge von P. Kurth sollten Sie mal skizzieren (unterscheiden Sie dazu gerade und ungerade n).

Zeigen Sie, dass die Folge nicht konvergent ist.

Die Folge ist nach Konstruktion nicht beschränkt. Da konvergente Folgen aber immer beschränkt sind, kann diese Folge nicht konvergent sein.