Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 3

Hinweis:

- Nutzen Sie dieses Blatt, um ihre bei der Lösung aufgetretenen Fragen in Eigenregie sinnvoll zu beantworten.

Aufgabe 1: ***n*-Tupel und Mengen**

Welche der folgenden Objekte sind gleich?

$$\{1,2,3\}, (1,2,3), \{2,3,1\}, (2,3,1), \{1,2,1,3\}, (1,2,1,3), (1,2,3,0), \{\{1\},2,3\}, (1,1,1)+(0,1,2).$$

Bei Tupeln kommt es auf die Reihenfolge der Einträge an, bei Mengen nicht. Außerdem ist ein 4-Tupel in jedem Fall etwas anderes als ein 3-Tupel. Bei einer Menge ändert die Mehrfachaufzählung eines Elemntes diese dagegen nicht. Daher ist

$$\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,2,1,3\}, \quad (1,2,3) \neq (2,3,1),\ (1,2,3) \neq (1,2,1,3),\ (1,2,3) \neq (1,2,3,0)$$

Da $1 \neq \{1\}$ gilt außerdem $\{1,2,3\} \neq \{\{1\},2,3\}$. Aufgrund der Definition der Tupeladdition ist schließlich $(1,2,3) = (1,1,1) + (0,1,2)$.

Aufgabe 2: Konkretisierung und Veranschaulichung

1) Beschreiben Sie den Inhalt der folgenden Mengen umgangssprachlich:

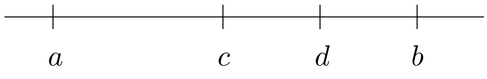
$$M_m = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{m} \notin \mathbb{N} \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Die Menge M_m enthält alle natürlichen Zahlen außer den Vielfachen von m. (Speziell ist $M_1 = \emptyset$ und M_2 die Menge der ungeraden Zahlen.)

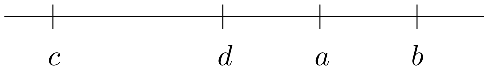
2) Veranschaulichen Sie folgende Situation auf dem Zahlenstrahl

$$(a < b) \ \wedge\ (b > c) \ \wedge\ (c < d)$$

Ist $a < d$ möglich? Muss $a < d$ sein?



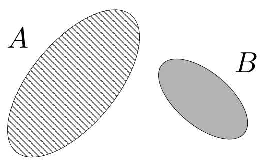
Es ist möglich ...



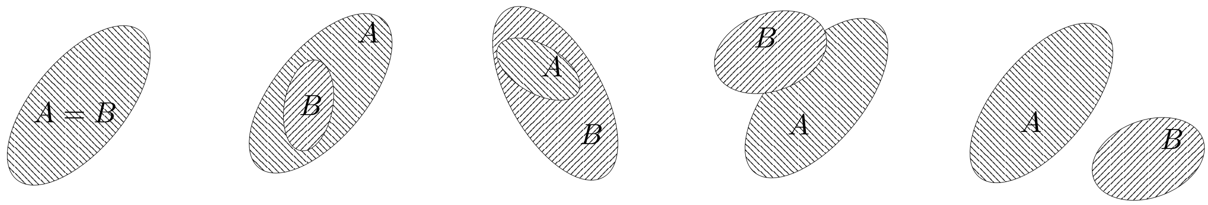
... aber nicht unbedingt!

Aufgabe 3: Bilder für Mengenbeziehungen

Beziehungen zwischen Mengen veranschaulicht man oft mit Teilmengen der Zeichenebene (selbst wenn die Mengen andere Objekte enthalten also z.B. Zahlen, Folgen, Vektoren, etc.). Typische Teilmengen A, B einer Menge M stellt man also so dar:

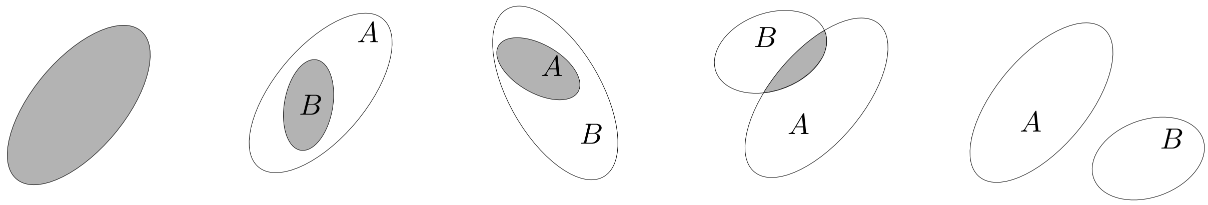


wobei man den Teil, der zur Menge gehört, durch Färbung bzw. Schraffierung hervorhebt. Natürlich können Teilmengen der Zeichenebene im Prinzip auch schrumpelig, spitz, dürr und unzusammenhängend sein – überlegen Sie immer, ob die von Ihnen gewählte Mengenform im betrachteten Zusammenhang allgemein genug ist.
Die relative Lage von zwei Mengen umfasst fünf Möglichkeiten: die Gleichheit, die echte Teilmengensituation (A echte Teilmenge von B oder umgekehrt) und die beiden Fälle, wo die Mengen teilweise bzw. gar nicht überlappen.
Zeichnen Sie die fünf Grundfälle

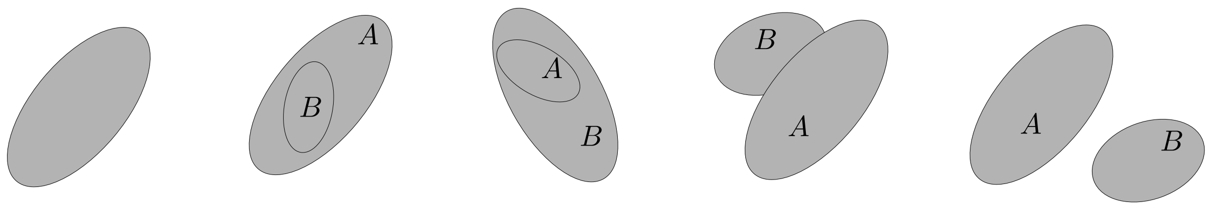


sowie für jeden Fall die folgenden Mengen **in grau**:

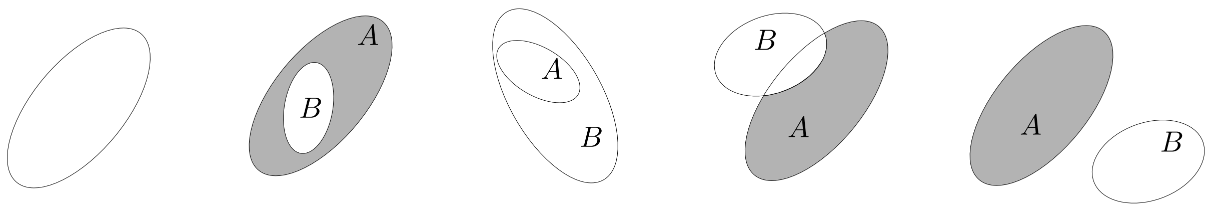
1. Die Schnittmenge $A \cap B := \{x \in M \,|\, x \in A \,\wedge\, x \in B\}$.



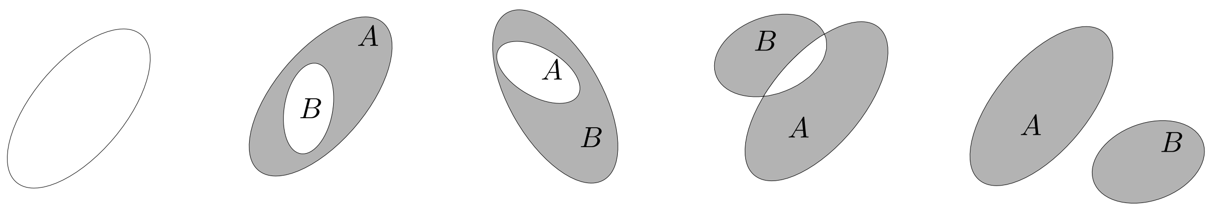
2. Die Vereinigungsmenge $A \cup B := \{x \in M \,|\, x \in A \,\vee\, x \in B\}$.



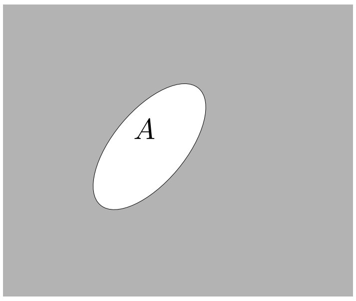
3. Die Differenzmenge $A \backslash B := \{x \in M \,|\, x \in A \,\wedge\, x \notin B\}$.



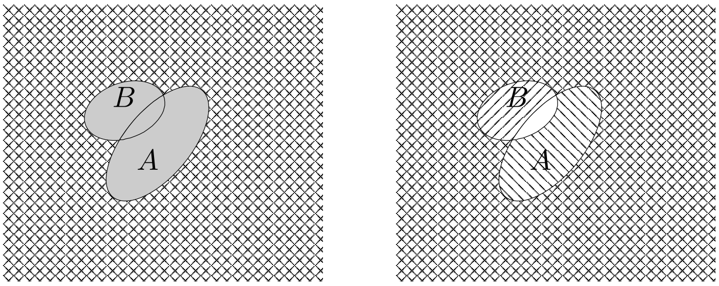
4. Die symmetrische Differenz $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.



5. Das Komplement $A^c := M \backslash A$ (natürlich male ich nicht das ganze Blatt an!)



Veranschaulichen Sie folgende Aussage $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ indem Sie die Mengenoperationen links vom Gleichheitszeichen und getrennt davon die Mengenoperationen rechts veranschaulichen. Erhalten Sie das gleiche Bild.



Links kennzeichnet die graue Fläche $A \cup B$ und die schraffierte Fläche das Komplement. Rechts ist A^c von links unten nach rechts oben schraffiert und B^c von links oben nach rechts unten. Der Bereich, wo beide Schraffierungen auftreten entspricht der Schnittmenge. Die Aussage ist also nicht unbedingt falsch, da in beiden Fällen die gleiche Menge erscheint. Man sollte jetzt versuchen die Aussage zu beweisen und zwar so, wie man Mengengleichheit immer zeigt: man überprüft $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ und $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Genauso kann man $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ behandeln. Die beiden Regeln heißen übrigens *De-Morgan-Regeln* und im Beweis benötigt man die De-Morgan-Regeln der Logik.

Aufgabe 4: Fehler oder nicht?

Ist $a < b \Rightarrow a \leq b$ wahr oder falsch?

Die Aussage $a \leq b$ bedeutet, dass $a < b$ oder $a = b$ ist. Wenn $a < b$ wahr ist, stimmt damit auch $a \leq b$. Also ist die Implikation wahr.

Was sagen Sie zu diesem Beweis: Sei $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$.
Dann gilt $S = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + \dots) = 1 + 2S$. Also folgt $S = -1$.

Ganz nett – oder? Das Problem ist, dass der Ausdruck $S = 1+2+4+8+16+\dots$ *keine* reelle Zahl beschreibt. Man kann diesem Ausdruck das Symbol ∞ zuweisen, da die Folge $S_n = 1+2+\cdots+2^n$ monoton wachsend und unbeschränkt ist. Für das Symbol ∞ gelten aber *nicht* alle Axiome und damit auch nicht alle Rechenregeln der reellen Zahlen. Während man $2\infty = \infty$ und $2\infty + 1 = \infty$ definieren würde, ist absolut unklar, was $2\infty - \infty$ sein soll! Genau diese Operation wird aber in dem "Beweis" wie bei rellen Zahlen üblich ausgeführt, was dann zu dem Unfug führt, dass eine unendliche Summe aus positiven Zahlen gleich -1 sein soll.