Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Prof. Dr. M. Junk
S. Assmann
J. Kern
P. Kurth

Mathematik einüben in Gruppenarbeit
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Das Summensymbol

1) Seien $m < 0$ und $n > 0$ ganze Zahlen und seien $a_m, \ldots, a_n$ positiv. Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich $\sum_{k=m}^{n} a_k$:
(Tipp: schreiben Sie die Summenausdrücke zum besseren Verständnis in der $+\cdots+$ Form, also z.B. $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$)

Die Bezeichnung des Summationsindex (k, i, j, ϕ, etc.) ist irrelevant. Bei gleichen Summanden und gleichen Summationsgrenzen umfasst die Summe offensichtlich die gleichen Terme.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{\phi=m}^{n} a_\phi.$$

Im zweiten Fall würde Gleichheit folgen, wenn über a_{j-1} summiert würde. Statt dessen ist

$$\sum_{j=m+1}^{n+1} a_{j+1} = a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{n+2} \neq \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Nach Definition ist eine Summe 0, wenn der obere Summationsindex kleiner als der untere ist. Deshalb

$$\sum_{t=n}^{m} a_t = 0 \neq \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Im nächsten Beispiel handelt es sich um einen sogenannten *Indexshift*. Hintergrund ist folgende Beobachtung: ersetzt man einen Summationsindex j konsequent an *allen* Stellen durch einen Ausdruck $i + b$, so ändert sich der Wert der Summe nicht. Bei der unteren Summationsgrenze $j = m$ entsteht dann der Ausdruck $i + b = m$, was in $i = m - b$ umgeformt werden kann. Vorsicht ist bei der oberen Summationsgrenze geboten. Sie transformiert sich entsprechend zu $n - b$ obwohl über dem Summenzeichen nur n und nicht $j = n$ steht. Mit der Ersetzung von i durch $j + k$ erhalten wir

$$\sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} = \sum_{j+k=m+k}^{n+k} a_{(j+k)-k} = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Im folgenden Beispiel treten drei Summen auf

$$\sum_{r=m}^{n} \left[\left(\sum_{s=m}^{r} a_s \right) - \left(\sum_{t=m}^{r-1} a_t \right) \right] = \sum_{r=m}^{n} [a_m + \cdots + a_r - (a_m + \cdots + a_{r-1})] = \sum_{r=m}^{n} a_r = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Im nächsten Beispiel ist wieder der obere Index kleiner als der untere

$$\sum_{\beta=n}^{m} a_{n-\beta+m} = 0 \neq \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Die folgenden beiden Beispielen basieren wieder auf einer Indextransformation. Ersetzt man λ durch $k-m$, so transformiert sich die Grenze $\lambda = 0$ zu $k-m=0$ also $k=m$ und die Grenze $\lambda = n-m$ zu $k-m = n-m$ also $k=n$

$$\sum_{\lambda=0}^{n-m} a_{m+\lambda} = \sum_{k-m=0}^{n-m} a_{m+(k-m)} = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Anstelle von additiven Indextransformationen sind auch beliebige andere umkehrbare Transformationen zulässig. Ersetzt man μ durch $-k$, so transformiert die untere Grenze $\mu = -n$ zur *oberen* Grenze $-k = -n$, also $k = n$ und die obere Grenze $\mu = -m$ zur *unteren* Grenze $k = m$.

$$\sum_{\mu=-n}^{-m} a_{-\mu} = a_{-(-n)} + a_{-(-n+1)} + \cdots + a_{-(-m)} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_m = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Im nächsten Fall tritt der Summationsindex nicht im Summanden auf. Es wird also $(n-m+1)$ mal die gleiche Zahl a_i addiert. Bis auf Spezialfälle wird dies nicht der Summe über die Terme $a_m, \ldots, a_n$ entsprechen.

$$\sum_{k=m}^{n} a_i = \underbrace{a_i + \cdots + a_i}_{n-m+1 \text{ mal}} = (n-m+1)a_i$$

Im letzten Beispiel kommt der Term a_0 zweimal vor

$$\sum_{i=m}^{0} a_i + \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + \sum_{k=m}^{n} a_k \neq \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

2) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit *einem* Summensymbol: Im ersten Beispiel wird über geradzahlige Indizes summiert

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.$$

Im zweiten Beispiel ergibt der Indexshift $j = k+1$ in der zweiten Summe bzw $i = k-1$ in der dritten Summe

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=2}^{n+1} b_j + \sum_{i=0}^{n-1} c_i = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_{k+1} + c_{k-1}).$$

Im dritten Beispiel können die beiden separaten Terme durch Änderung der Summationsgrenzen in die Summe aufgenommen werden

$$a_{n+1} + a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n+1} a_k.$$

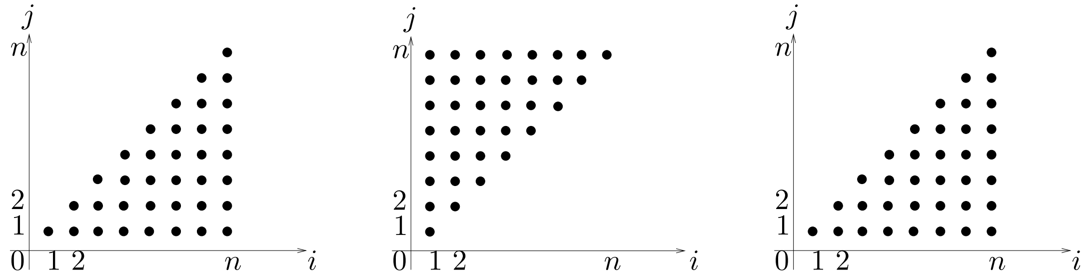
Schließlich kann man das letzte Beispiel umformen gemäß

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{m=0}^{n} b_m = \beta b_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

oder man definiert $a_0 = 0$ und schreibt $\sum\limits_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k)$.

3) Beim Umgang mit *Doppelsummen* ist es hilfreich, die von den Indizes durchlaufenen Werte in einem Diagramm zu veranschaulichen. Markieren Sie dazu für die folgenden drei Doppelsummen jeweils die Paare $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, die in der Summation auftreten, als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem. Welche der Summenausdrücke sind gleich?

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}.$$



Offensichtlich stimmen die erste und letzte Doppelsumme überein.

4) Oft ist es nützlich, den Indexbereich bei der Summation durch eine Menge anzugeben. Sind a_i Zahlen, die mit einem Index $i \in I$ indiziert sind und ist $A \subset I$, so bezeichnet $\sum\limits_{i \in A} a_i$ die Summe aller a_i, deren Index i in A enthalten ist. Definitionsgemäß gilt $\sum\limits_{i \in \emptyset} a_i = 0$.

- Stellen Sie die Summe $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ in der Form $\sum\limits_{k \in A} a_k$ dar. Wie muss die Menge A definiert sein, damit beide Fälle $n < m$ und $n \geq m$ korrekt wiedergegeben werden?

  Die Menge ist *nicht* durch $A = \{m, \ldots, n\}$ gegeben, sondern durch $A = \{i \in \mathbb{N} | m \leq i \leq n\}$, da nur letztere im Fall $n < m$ gleich der leeren Menge ist und die Summe daher gleich 0 ist.

- Für $j \in \mathbb{N}$ sei $B_j = \{k \in \mathbb{N} | k < j \wedge \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n\}$ und für beliebige $m \in \mathbb{N}$ sei $A_m = \{n \in \mathbb{N} | m - n > 0\}$. Was ist $\sum\limits_{m \in B_5} \sum\limits_{i \in A_m} a_i$.

  Die Menge B_j enthält alle natürlichen Zahlen kleiner als j, die gerade sind, also $B_5 = \{2, 4\}$. Die Menge A_m enthält alle natürlichen Zahlen kleiner als m, also $A_2 = \{1\}$ und $A_4 = \{1, 2, 3\}$. Damit ist

  $$\sum_{m \in B_5} \sum_{i \in A_m} a_i = \sum_{i \in A_2} a_i + \sum_{i \in A_4} a_i = a_1 + (a_1 + a_2 + a_3) = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

- Unter welchen Bedingungen an A und B gilt $\sum\limits_{i \in A} a_i + \sum\limits_{j \in B} a_j = \sum\limits_{k \in A \cup B} a_k$

  Die Mengen A und B müssen disjunkt sein, d.h. $A \cap B = \emptyset$, da sonst Summanden mit Index in $A \cap B$ auf der linken Seite doppelt auftreten, auf der rechten Seite aber nur einfach.

- Schreiben Sie $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} a_{(i,j)}$ als Summe mit einer geeigneten Indexmenge $A \subset \mathbb{N}^2$.

  Die Indexmenge lautet $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | 1 \leq i \leq n \ \wedge \ 1 \leq j \leq i\}$.

<u>Aufgabe 2:</u> Umgang mit mathematischen Sätzen

Einen mathematische Aussage veranschaulicht man sich üblicherweise durch folgende Schritte: (1) Was wird ausgesagt? Was sind die Voraussetzungen und wie lautet die Behauptung? (2) Wie sieht ein typisches Beispiel aus, das die Voraussetzungen erfüllt? Stimmt die Behauptung in diesem Fall? (3) Sind die Voraussetzungen wesentlich für die Behauptung? Gibt es Beispiele, die einzelne Voraussetzungen nicht erfüllen ohne dass die Behauptung falsch wird?
Zur Konkretisierung betrachten Sie folgende Aussage:

Eine streng monoton wachsende Folge ist konvergent, falls sie beschränkt ist.

- Separieren Sie Voraussetzungen und Behauptung des Satzes.

  Voraussetzung: die Folge ist beschränkt und streng monoton wachsend
  Behauptung: die Folge ist konvergent

- Formulieren Sie Voraussetzungen und Behauptung *ausschließlich* mit mathematischen Symbolen - also möglichst präzise.

  Voraussetzung: $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < M \ \wedge \ a_n < a_{n+1}$
  Behauptung: $\exists a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$

- Untersuchen und veranschaulichen Sie die Aussage des Satzes:

  - Geben Sie ein typisches Beispiel an, das Voraussetzungen und Behauptung erfüllt.

    Als Beispiel dient etwa $(1 - 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  - Geben Sie Beispiele an, bei denen jeweils einzelne Voraussetzungen *nicht* erfüllt sind und die Behauptung *nicht* stimmt. Wenn Sie zu einer Voraussetzung *kein* solches Beispiel finden, dann liegt die Vermutung nahe, dass der Satz auch ohne die entsprechende Voraussetzung stimmt. Gibt es in diesem Beispiel eine solche Voraussetzung?

    Beispiel: Folge *unbeschränkt* und streng monoton wachsend: $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *nicht* konvergent. (Tatsächlich ist Beschränktheit notwendig für Konvergenz.)

    Beispiel: Folge beschränkt und *nicht* streng monoton wachsend: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *nicht* konvergent, d.h. Beschränktheit allein reicht nicht aus, um Konvergenz zu sichern.

    Beispiel: Folge beschränkt und *nicht* monoton wachsend: $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* konvergent, d.h. Monotonie ist nicht notwendig, um Konvergenz zu sichern.

    Beispiel: Folge beschränkt und *nur* monoton wachsend: $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* konvergent. (Aus der Vorlesung wissen wir, dass Monotonie und Beschränktheit hinreichend ist für Konvergenz, d.h. die Forderung nach strenger Monotonie könnte reduziert werden).

Nach dieser Vorbereitung können Sie sicher den Fehler im "Beweis" zu folgender Aussage finden:

Jede streng monoton wachsende Folge ist divergent.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend. Dann gilt $d_n = a_{n+1} - a_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen $d := \inf\{d_0, d_1, d_2, d_3, \dots\}$. Es gilt dann $a_{n+1} \geq d + a_n$ für alle n. Durch Induktion zeigt man damit, dass $a_n \geq a_0 + nd$ folgt. Da nd für genügend großes n jede positive Schranke überwindet (Archimedisches Prinzip), ist die Folge (a_n) unbeschränkt und somit divergent.

Der Fehler im Beweis liegt darin, dass das Infimum d im Allgemeinen nicht größer als 0 ist. Ist die Folge nämlich beschränkt, so müssen die Zuwächse d_n immer kleiner werden, so dass das Infimum gleich 0 ist. Damit ist das Archimedische Prinzip aber nicht anwendbar.